Übungsblatt 08: Vektoren, LGS und Geometrie

Die **Vektorrechnung** ist eins der Fundamente der modernen Ingenieursmathematik. Während die Anfänge der Theorie darauf zurückgingen, geometrische Probleme rein analytisch (ohne Zeichnen) zu lösen, sind die Vektoren, Matrizen und die Linearen Gleichungssysteme heute aus der mathematischen Praxis kaum noch wegzudenken. Die Fähigkeiten in diesem Gebiet werden bei Prof. Eppler in 1-2 Klausuraufgaben abgefragt, dabei gibt es große Schwankungen in Sachen Schwierigkeitsgrad. Allerdings sind durchaus auch einige einfache Aufgaben zu erwarten, bei denen sich mit wenig Aufwand viele Punkte erobern lassen. Auch in der Mathe 2 ist ein kompetenter Umgang mit Vektoren und LGS absolut notwendig.

In diesem und den nächsten 2 Übungsblättern werden die Grundlagen der Vektor- und Matrizenrechnung wiederholt. Auf diesem Blatt ganz konkret:

- Vektoren, Betrag, Winkel, Skalarprodukte, Kreuzprodukte
- Flächeninhalte von Dreiecken und Parallelogrammen im $\mathbb{R}^3$
- Geraden und Ebenen
- LGS mit Gaußverfahren: Eindeutiger Fall, unendliche Lösungsmenge, Unlösbarkeit
- LGS mit Parametern

Aufgabe 1: Vektoren und Vektoroperationen

a) Für welches $a \in \mathbb{R}$ nimmt $\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ a \end{pmatrix}$ den Wert 10 an?

b) Welche der folgenden Vektoren stehen aufeinander orthogonal?

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) Bestimmen Sie das Kreuzprodukt $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$.

d) Für welche $a \in \mathbb{R}$ nimmt $\begin{pmatrix} a \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ die Länge 4 an?

e) Bestimmen Sie den Vektor $v \in \mathbb{R}^3$, der senkrecht auf $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ steht, für den $v \cdot e_z \geq 0$ gilt und der die Länge 1 hat!

f) Welcher Winkel liegt im Dreieck $A(0,1,0), B(2,3,0), C(1,1,-1)$ im Punkt A an?

Aufgabe 2: Parallelogramme, Flächeninhalte

a) Bestimmen Sie den Punkt D im Parallelogramm $ABCD$ mit den folgenden Koordinaten:

$$A(1,4,0), B(2,5,0), C(1,1,5)$$

b) Bestimmen Sie den Punkt C im Parallelogramm $ABCD$ mit den folgenden Koordinaten:

$$A(1,1,2), B(0,2,1), D(1,6,1)$$

c) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den beiden Vektoren $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird!

d) Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Parallelogramme aus a) und b).

e) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks $A(0,1,0), B(2,3,0), C(1,1,-1)$.

Aufgabe 3: Geraden und Ebenen

a) Geben Sie eine Gerade g an, die durch die Punkte $A(1,4,2), B(0,-3,6)$ verläuft!

b) Geben Sie eine Ebene an, die durch die $A(1,4,2), B(0,-3,6), C(2,1,-1)$ verläuft. Geben Sie sowohl die Parameterform als auch die parameterfreie Darstellung an!

c) Welchen Abstand haben der Koordinatenursprung und der Punkt $P(1,1,0)$ von der Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$?

d) Welche der genannten Punkte liegen auf der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzw. der Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$?

$$A(1,4,0), B(2,1,3), C(1,2,0), E(2,-1,-1), F(0,-1,-1)$$

e) Wo und in welchem Winkel schneiden sich g und E? (Taschenrechner beim Winkel nötig!)

(1) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

(2) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, E: 6x + y - 3z = 35$

Aufgabe 4: Eindeutig lösbare LGS

Ermitteln Sie die (eindeutige) Lösung der folgenden linearen Gleichungssysteme mit dem Gaußverfahren oder anderen geeigneten Methoden!

a)
$$\begin{aligned} 2 &= -x - 2y + 5z \\ 0 &= 2x + 3y - 4z \\ 1 &= 4x + y + 3z \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2 &= x + z \\ 1 &= x - y \\ 5 &= 2x + y - z \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 1 &= y + z \\ -3 &= 2x - 2y \\ 0 &= 2x + y + z \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 6 &= 4z \\ i + 1 &= 4x - y \\ -3i &= x + z \end{aligned}$$

Aufgabe 5: LGS ohne Lösung und mit unendlicher Lösungsmenge

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden LGS:

a)
$$\begin{aligned} 0 &= 2x - y - z \\ -3 &= 4x + 2y \\ 1 &= 2x - y - z \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 1 &= 2x - y - z \\ -1 &= x + 2y \\ 0 &= 3x + y - z \end{aligned}$$

c)
$$6 = 10x - 2y - 4z$$

Aufgabe 6: LGS mit Parametern

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS in Abhängigkeit der Parameter.

a)
$$\begin{aligned} 0 &= 2x - 6y + az \\ -3b &= x + 2y \\ b + 1 &= 2x - y - z \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 0 &= x - by + z \\ 2d + 3 &= 6x - 2y \\ 5 &= 2x - 2by - z \end{aligned}$$

Weiteres empfohlenes Übungsmaterial:

Pforr/Oehls./Seltmann Ü3	1.1.4., 1.1.5.
	2.1.12., 2.1.2., 2.1.15., 2.1.9.
	3.2.6. (Auswahl), 3.2.8. (Auswahl), 3.2.12., 3.2.13.

Empfohlene Klausuraufgaben:

Fischer Februar 2009 Testat / 6	(mittelschwer)
Grossmann Mai 2004 Testat / 5	(mittelschwer)
Matthies Februar 2016 / 7	(einfach)

Lösungen: (Angaben ohne Gewähr, bei Unklarheit bitte nachfragen)

1.

a) $a = \frac{7}{4}$ **b)** $v_1 \perp v_2, v_1 \perp v_4, v_2 \perp v_3, v_3 \perp v_4$ **c)** $(-75, 7, -4)^T$

d) $a = \pm\sqrt{3}$ **e)** $v = \frac{1}{\sqrt{115}}\begin{pmatrix}-9\\-3\\5\end{pmatrix}$ **f)** $\propto = 60°$

2. a) $D(0{,}0{,}5)$ **b)** $C(0{,}7{,}0)$ **c) A= 75,35** **d)** $A = \sqrt{59}$ bzw. $A = \sqrt{42}$ **e)** $A = \sqrt{3}$

3. a) $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\-7\\4\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\-7\\4\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\-3\\-3\end{pmatrix}$, $E: 33x + y + 10z = 57$

c) Ebene: $E: 10x - 2y + 4z = 6$ **HNF:** $E: \frac{10}{\sqrt{120}}x - \frac{2}{\sqrt{120}}y + \frac{4}{\sqrt{120}}z = \frac{6}{\sqrt{120}}$

Abstand zu Null: $\frac{6}{\sqrt{120}} = \frac{3}{\sqrt{30}} = \sqrt{\frac{3}{10}}$ **Abstand zu P:** $\frac{6}{\sqrt{120}} - \frac{10}{\sqrt{120}}1 + \frac{2}{\sqrt{120}}1 - \frac{4}{\sqrt{120}}0 = -\frac{2}{\sqrt{120}}$

Also Abstand zu P: $\frac{2}{\sqrt{120}} = \frac{1}{\sqrt{30}}$

d) Gerade g durch Einsetzen: Punkt B und F liegen auf g

Ebene E entspricht parameterfreier Form: $E: 4x - 4y + 2z = 10$, enthalten sind nach Einsetzen: B, E

e) (1) $\boldsymbol{E}: 5x + 2y - 3z = 32$, Einsetzen ergibt s=1, somit Schnittpunkt (5,5,1),

Winkel: $\frac{\begin{pmatrix}4\\2\\-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5\\2\\-3\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}4\\2\\-1\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}5\\2\\-3\end{pmatrix}\right|} = \frac{27}{\sqrt{21}\cdot\sqrt{38}} = 0{,}956,$ 90° - arccos$(0{,}956) = 72{,}9°$

(2) P(3,8,-3), Winkel: 30,98°

4.

a) $x = -1, y = 2, z = 1$ **b)** $x = 2, y = 1, z = 0$

c) $x = -\frac{1}{2}, y = 1, z = 0$ **d)** $x = -\frac{3}{2} - 3i, y = -7 - 13i,\ z = \frac{3}{2}$

5.

a) $L = \emptyset$

b) Mit $y = t$ folgt: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\-3\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-2\\1\\-5\end{pmatrix}$

c) Mit $x = t, z = s$ folgt: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-3\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\5\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$

6.

a) $a \neq -2$ eindeutig lösbar, $a = -2, b = -\frac{1}{4}$ unendliche Lösungsmenge, $a = -2, b \neq -\frac{1}{4}$ unlösbar

b) $b \neq \frac{1}{3}$ eindeutig lösbar, $b = \frac{1}{3}, d = -\frac{7}{2}$ unendliche Lösungsmenge, $b = \frac{1}{3}, d \neq -\frac{7}{2}$ unlösbar