Themen-Fokus:
Krummlinige Koordinaten

<u>Beispielaufgabe:</u>

Für die reellen Parameter $\boldsymbol{0 < a < b,\ \ 0 < c < d}$ *wird ein Bereich* $\boldsymbol{B}$ *wie folgt erklärt:*

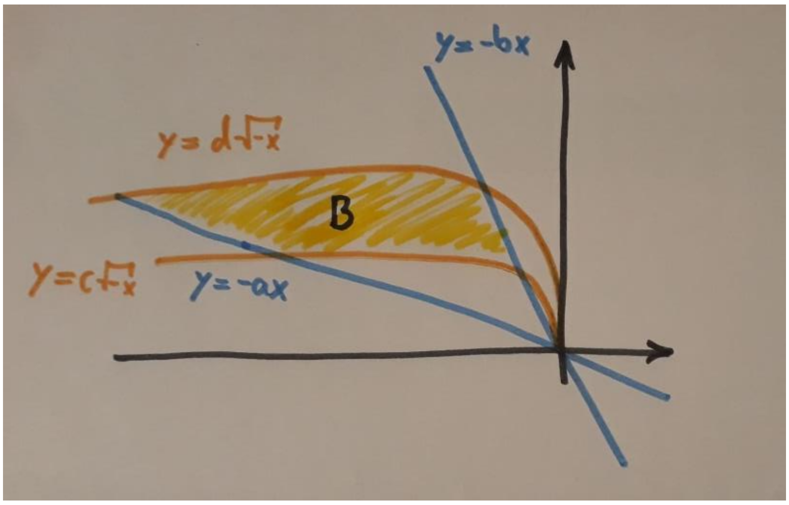
$$\boldsymbol{B} := \left\{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^2 \mid \ \boldsymbol{x} < \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{a} \le -\frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x}} \le \boldsymbol{b},\ \ \boldsymbol{c} \le \frac{\boldsymbol{y}}{\sqrt{-\boldsymbol{x}}} \le \boldsymbol{d}\right\}$$

Skizziere den Bereich $\boldsymbol{B}$ *und berechne unter Nutzung geeigneter krummliniger Koordinaten die Masse von* $\boldsymbol{B}$ *bezüglich der Dichte* $\boldsymbol{\delta(x, y) = x^2 y}$ *.*

Das Skizzieren ist nicht schwer, wenn man die beiden Ungleichungen jeweils nach y umstellt:

$$a \le -\frac{y}{x} \le b \quad \Rightarrow \quad -ax \le y \le -bx \ \ \text{(Beachte: Das Ungleichheitszeichen bleibt, da} -x > 0\text{)}$$

$$c \le \frac{y}{\sqrt{-x}} \le d \quad \Rightarrow \quad c\sqrt{-x} \le y \le d\sqrt{-x}$$



Nun zur Berechnung:

Ein geeigneter Ansatz für die krummlinigen Koordinaten ist $u := -\frac{y}{x}\ ,\ \ v := \frac{y}{\sqrt{-x}}$, da so die Parameter u, v in einfachen Intervallen $a \le u \le b,\ \ c \le v \le d$ laufen.

Die **Herausforderung der Aufgabe** besteht nun darin, die Funktionaldeterminante für diese Koordinatentransformation zu erzeugen. Wir erinnern uns dabei daran, dass die Funktionaldeterminante immer als **Term in den neuen Koordinaten** (d.h. hier in u, v) in das Integral eingeht.

Variante 1: Umstellen nach x, y, danach direkt rechnen

Aus $u = -\frac{y}{x}$ erhalten wir $y = -ux$ und somit:

$$v = \frac{-ux}{\sqrt{-x}} = u\sqrt{-x}\,, \qquad \sqrt{-x} = \frac{v}{u}\,, \qquad x = -\frac{v^2}{u^2}\,,\ y = -ux = \frac{v^2}{u}$$

Somit:

$$D = \det\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2v^2/u^3 & -2v/u^2 \\ -v^2/u^2 & 2v/u \end{pmatrix} = \frac{4v^3}{u^4} - \frac{2v^3}{u^4} = \frac{2v^3}{u^4}$$

Damit muss nur noch das Integral berechnet werden: $\delta(x,y) = x^2 y = \left(-\frac{v^2}{u^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{v^2}{u}\right) = \frac{v^6}{u^5}$

$$\iint_B \delta\, dB = \int_{u=a}^{b} \int_{v=c}^{d} \frac{v^6}{u^5} \cdot \frac{2v^3}{u^4}\, dv\, du$$

$$= \int_{u=a}^{b} \frac{2}{u^9} \left[\frac{1}{10} v^{10}\right]_c^d du$$

$$= \frac{1}{5}(d^{10} - c^{10}) \left[-\frac{1}{8} u^{-8}\right]_a^b$$

$$= -\frac{1}{40}(d^{10} - c^{10})(b^{-8} - a^{-8})$$

Variante 2: Indirekte Berechnung über die Jacobimatrix von $u = u(x,y), v = v(x,y)$

Die zweite Variante, mit der der **Satz über die Diffeomorphismen** angewandt wird, ist hier nicht zielführend. Er würde so ablaufen:

$$D = \det\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}^{-1} = \left(\det\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}\right)^{-1}$$

Im Anschluss müsste der erhaltene Term (in den Koordinaten x, y) noch nach den Koordinaten u, v umgestellt werden. Es ergibt sich zwar das gleiche D, der Weg ist aber ungleich komplizierter als in Variante 1.

Dennoch: Diese Variante 2 hat in anderen Beispielen ihre Berechtigung (siehe Übungsblatt 05, Aufgabe 4).