

Trainingsartikel mit Beispielen: Inhomogene lineare DGL höherer Ordnung

Die linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten sind ein Klassiker jeder Mathe-2-Klausur im Maschinenwesen.

Auf diesen Aufgabentyp verfallen in der Regel 7-12% der Klausurpunkte, und das Schöne daran ist, dass der Lösungsalgorithmus auch mit vertretbarem Aufwand gut lernbar ist.

Wie genau, findest du hier in unserem eArtikel 😊

1. Was ist eigentlich eine lineare DGL höherer Ordnung?

Für typische Mathe 2 Prüfungen versteht man hierunter stets die folgende DGL, die auf den Kaugummi-Namen „Lineare DGL höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten“ hört:

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = r(x)$$

Für die „homogene“ DGL gilt dabei $r(x) = 0$, für die „inhomogene“ $r(x) \neq 0$.

2. Wie ist der Ablauf zur Lösung?

Ich empfehle gern die folgende 4-Schritte-Methode:

- (1) Löse die homogene DGL => homogene Lösung y_H
- (2) Finde den Ansatz y_p für die inhomogene DGL
- (3) Berechne alle nötigen Ableitungen von y_p , setze diese ein und ermittle damit das korrekte y_p
- (4) Die Gesamtlösung ist $y = y_p + y_H$. Setze am Ende ggf. Anfangswerte ein!

In diesem eArtikel können wir uns nur auf den Schritt (2) konzentrieren. Die Schritte (1) und (3) sind aber sehr gut via Youtube lernbar, und Schritt (4) ist nur das einfache Zusammenbasteln der Ergebnisse von (1), (2), (3).

3. Wie findet man den Ansatz? (Schritt (2))

Hier verwenden viele Universitäten einen (meiner Ansicht nach) zu komplizierten Weg. Typisch für die Uni-Übungen ist die Vorgehensweise, die Störfunktion $r(x)$ auf spezifische λ zu untersuchen und das mit der charakteristischen Gleichung der homogenen DGL abzugleichen. Im Anschluss wird dann eine stark überkomplizierte Formel eingesetzt. Besser nicht!

Es geht einfacher:

Teil A: Aus $r(x)$ den sogenannten „Normalansatz“ bestimmen

Schau dir zunächst die Störfunktion an. Was für eine Art der Funktion siehst du? Nutze dann diese Tabelle, um den Normalansatz herauszufinden:

$r(x)$	Normalansatz für y_p
e^{ax}	Ae^{ax}
$\cos(bx)$ und/oder $\sin(bx)$	$B\cos(bx) + C\sin(bx)$
Polynom von Grad k	$A_k x^k + \dots + A_1 x + A_0$ (Vollpolynom Grad k)
$r_1(x) + r_2(x)$	Ansatz $r_1(x)$ + Ansatz $r_2(x)$
$r_1(x) \cdot r_2(x)$	Ansatz $r_1(x)$ · Ansatz $r_2(x)$ <i>Achtung: Parameter sparen!</i>

Ob e-Funktion, cos/sin oder Polynom: Du setzt also am besten genau diese Funktion auf die in der Tabelle beschriebene Weise an. Ist die Störfunktion Summe oder Produkt zweier Störfunktionen, nutzt du die Summe bzw. das Produkt der Ansätze. Im Fall des Produkts kann es dabei notwendig sein, dass du Parameter einsparst.

Beispiele findest du hier im Video:

<https://www.youtube.com/watch?v=rQwUb4lpYNs>

(Kleiner Hinweis: Der Youtube-Kanal entsteht gerade und steckt noch in den Kinderschuhen, wird aber ab Wintersemester 2019/2020 auch einige Videos rund um Mathe 3 enthalten; wenn du dabei sein möchtest, schreib uns gern einen Kommentar und abonniere ihn, ich plane im Wintersemester auch die Erstellung zahlreicher Videos auf Basis der typischen Fragen zur Mathe 3 an der TU Dresden)

Teil B: Überprüfen des Ansatzes auf Resonanz mithilfe von y_H

Anmerkung: In der Vergangenheit waren die meisten Klausuraufgaben (insb. die von Prof. Fischer) ohne Beachtung der Resonanz zu lösen. Resonanz kam u.a. bei Prof. Matthies vor, die Komplexität war aber überschaubar.

Die Regel ist folgende:

- Resonanz tritt auf, wenn eine der in y_p als Summand vorkommenden Funktionen auch in y_H vorkommen (dann würde dieser Summand beim Einsetzen in die DGL ja zu Null werden)
- Resonanz lösen wir, indem wir diesen Summanden mit x multiplizieren. Dabei ist zu beachten, dass ein Polynom stets als **ein** Summand gilt.
- Nach Auflösen der Resonanz bitte immer nochmal prüfen, ob eine neue Resonanz entstanden ist!

Beispiele:

$$(1) r(x) = x^2 + e^{3x} - 2e^{-x}, y_H = c_1 + c_2e^x + c_3e^{3x}$$

Zunächst Normalansatz: $y_p = Ax^2 + Bx + C + De^{3x} + Ee^{-x}$

Resonanzcheck: Funktion 1 (Parameter C, c_1) und Funktion e^{3x} (Parameter D, c_3)

Damit müssen **das ganze Polynom** und die **e^{3x} -Funktion** mit x multipliziert werden:

$$y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx + Dxe^{3x} + Ee^{-x}$$

Resonanzcheck: Jetzt resonanzfrei

$$(2) r(x) = e^x + 3 \cos(2x), y_H = c_1e^x + c_2e^x \cos(2x) + c_3e^x \sin(2x)$$

Zunächst Normalansatz: $y_p = Ae^x + B \cos(2x) + C \sin(2x)$

Resonanzcheck: Nur e^x hat Resonanz! Die anderen Funktionen kommen nicht exakt 1:1 als genau dieser Faktor in y_H vor!

Damit muss nur die **e^x -Funktion** mit x multipliziert werden:

$$y_p = Axe^x + B \cos(2x) + C \sin(2x)$$

Resonanzcheck: Jetzt resonanzfrei

$$(3) r(x) = 3x^2 - 2, y_H = c_1e^x + c_2 + c_3x + c_4x^2$$

Zunächst Normalansatz: $y_p = Ax^2 + Bx + C$

Resonanzcheck: Alle Summanden des Polynoms stehen in Resonanz!

Neu: $y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx$

Resonanzcheck: x^2 und x stehen in Resonanz!

Neu: $y_p = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2$

Resonanzcheck: x^2 steht in Resonanz!

Neu: $y_p = Ax^5 + Bx^4 + Cx^3$ (jetzt endlich resonanzfrei)

Damit ist die Frage rund um die Ansätze und die Resonanzen hoffentlich gut geklärt. Aus Zeitgründen muss der kleine eArtikel jetzt schon schließen, im nächsten Semester wird er dann schon etwas ausführlicher ausfallen 😊

Viele Grüße und viel Erfolg bei deiner Klausur wünscht

Matthias vom LernKompass-Team

P.S.: Wer die Ansätze auch nochmal üben möchte, kann unser Übungsblatt nutzen. Exklusiv für die Zeit im August 2019 haben wir es hier offen zur Verfügung gestellt:

<https://www.lern-kompass.de/wp-content/uploads/2019/08/04-Inhomogene-DGL-hoeherer-Ordnung.pdf>