Aufgabenblatt B1 : Lineare Funktionen, lineare Gleichungen

Auf dem **ersten Arbeitsblatt des zweiten Teils** studieren wir die linearen Funktionen und linearen Gleichungen.

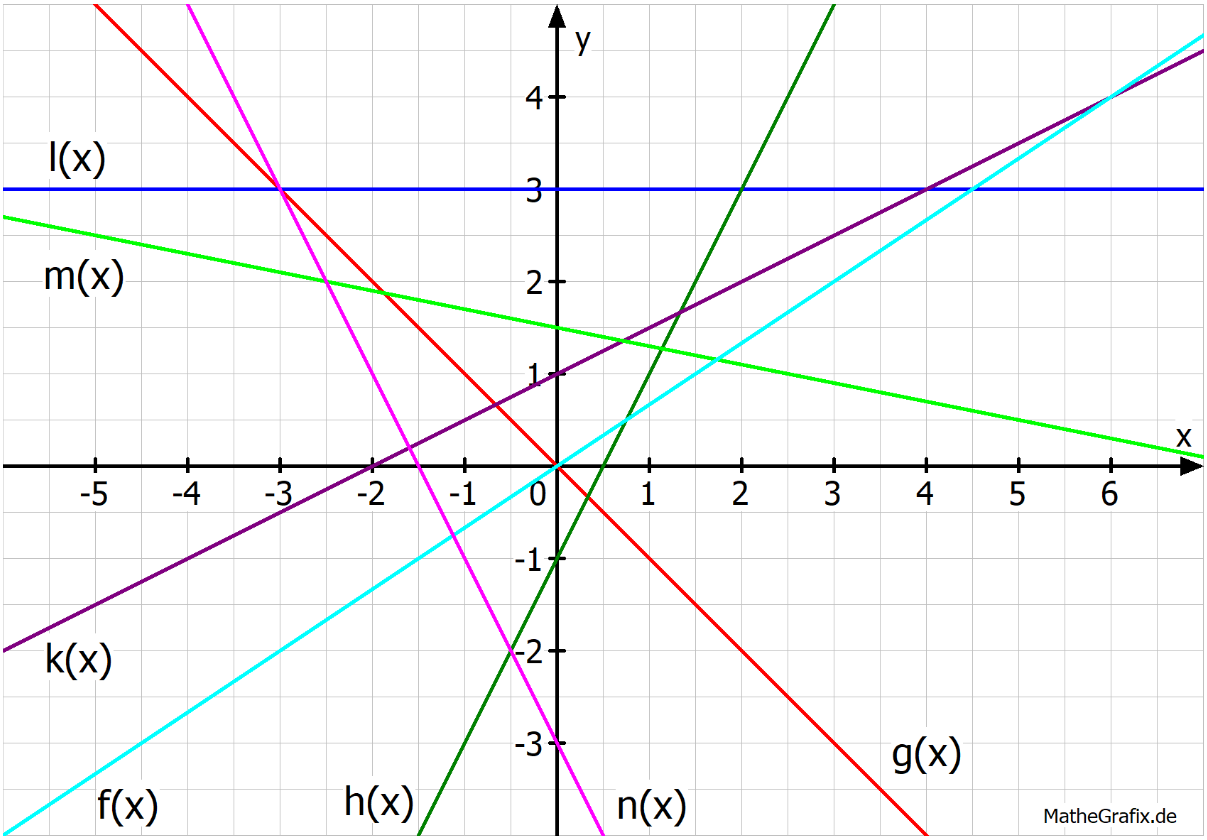
Diese beiden Strukturen bilden jeweils die **Ausgangsbasis** für die umfangreichen Theorien der **mathematischen Funktionen** bzw. **Gleichungen** im Allgemeinen. Auch wenn die auf diesem Blatt behandelten Themen recht einfach anmuten, enthalten sie dennoch alle wichtigen Konzepte und mathematischen Ideen, die in den späteren Themen wiederkehren werden.

Welche Fertigkeiten werden im Einzelnen auf diesem Blatt trainiert?

- Lineare Funktionen: Ablesen, Zeichnen
- Bruchrechnen mit Parametern und Variablen
- Anwendung: Prozentrechnen und Rechnen mit physikalischen Einheiten
- Quadratische Ergänzung
- Höhere Binome $(a+b)^n$ ausmultiplizieren (binomischer Satz)

Aufgabe 1: Ablesen von linearen Funktionen

Welche (linearen) Funktionen gehören zu den folgenden Funktionsgraphen?



Aufgabe 2: Zeichnen von linearen Funktionen

Zeichnen Sie die folgenden linearen Funktionen in ein Koordinatensystem :

$f_1(x) = \frac{3}{4}x$	$g_1(x) = x + 1$	$h_1(x) = -x + 3$
$f_2(x) = -2x$	$g_2(x) = 5x - 4$	$h_2(x) = -\frac{4}{5}x - 1{,}5$
$f_3(x) = 0{,}5x$	$g_3(x) = \frac{2}{3}x - 2$	$h_3(x) = -1{,}2x + 0{,}5$

Bemerkung: *Probieren Sie dabei gern verschiedene Methoden aus, z.B.*
(i) auf Basis von m und n (ii) mit 2 markanten Punkten (iii) mit Wertetabelle

Aufgabe 3: Funktionsgleichungen linearer Funktionen aufstellen

a) Ermitteln Sie diejenige lineare Funktion, die durch die Punkte P, Q verläuft:

(1) $P(0;0),\ Q(2;4)$ (2) $P(0;0),\ Q(3;-2)$ (3) $P(7;5),\ Q(2;-2)$

b) Ermitteln Sie die lineare Funktion g, die zu f parallel und durch den Punkt P verläuft:

(1) $f(x) = 3x + 1, P(0;2)$ (2) $f(x) = 4 + \frac{2}{3}x, P(-3;7)$

c) Ermitteln Sie diejenige lineare Funktion g, die f orthogonal schneidet und durch den Punkt Q verläuft:

(1) $f(x) = 4x + 3, Q(1;1)$ (2) $f(x) = 5 - \frac{5}{4}x, P(1;0)$

Aufgabe 4: Funktionseigenschaften

a) Entscheiden Sie, ob die Graphen der gegebenen Funktionen durch P_1, P_2, P_3 verlaufen:

(1) $f(x) = 3x - 2, P_1(1;2), P_2(0;-2), P_3(6;16)$ (2) $g(x) = 2 - \frac{x}{4}, P_1(4;1), P_2(0;1), P_3\left(\frac{2}{3};1\right)$

b) An welchen Stellen nimmt die Funktion die gegebenen Funktionswerte an?

(1) $f(x) = 2x + 1,\ \ y_1 = 3, y_2 = 5$ (2) $g(x) = 4 - \frac{3}{7}x,\ \ y_1 = 1, y_2 = -4$

c) Berechnen Sie die Schnittpunkte der folgenden Funktionen mit den Koordinatenachsen:

(1) $f(x) = 7x + 2$ (2) $g(x) = 9 - \frac{4}{3}x$

d) Berechnen Sie die jeweils fehlende Koordinate der Punkte P_k $(k = 1,2,3,4)$:

$f(x) = -4x + 2,\quad P_1(x;-6),\quad P_2(-1;y),\quad P_3\left(x;\frac{2}{5}\right),\quad P_4\left(\frac{3}{4};f(x)\right)$

Aufgabe 5: Nullstellen und Schnittpunkte

a) Berechnen Sie die Nullstellen von folgenden Funktionen:

(1) $f_1(x) = 4x + 2$ (3) $g_1(x) = 3x + 1$ (5) $h_1(x) = -\frac{3}{4}x - 1$

(2) $f_2(x) = -x + 1$ (4) $g_2(x) = -0{,}4x - 12$ (6) $h_2(x) = -\frac{4}{5}x + 2$

b) Berechnen Sie jeweils den Schnittpunkt der gegebenen Funktionen:

(1) $f_1(x) = 2x + 1,\ f_2(x) = 5x - 2$ (3) $h_1(x) = -4x - 1,\ \ h_2(x) = 3x + 13$

Aufgabe 6: Lineare Gleichungen

a) Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungen *(Anfänger-Niveau, möglichst im Kopf lösen!)*

(1) $x + 3 = -12$ (3) $10x + 1 = 37$ (5) $5x + 28 = -2x$
(2) $-6x = 48$ (4) $4 - 2x = -16$ (6) $15 - 5x = 2x - 20$

b) Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungen *(Fortgeschrittenen-Niveau)*

(1) $\frac{2}{5}x = 10$ (5) $12 - (-3x + 6) = 18 - (9 + 3x)$
(2) $\frac{2}{3}x + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}x + \frac{5}{6}$ (6) $2 - 7(2x + 5) - 3(2x - 4) = 19$
(3) $-1{,}5x + 6{,}75 = 7{,}5x + 1{,}35$ (7) $3 - (2 + 2x) = -(2x - 1)$
(4) $15 + 11x = 2(3 + x)$ (8) $5(x + 3) = 4x - (1 - x)$

Aufgabe 7*: Parameterabhängige lineare Gleichungen

a) Ermitteln Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ der folgenden linearen Gleichungen in Abhängigkeit der gegebenen Parameter:

(1) $3\alpha + 2x = x - 3$ (3) $kx + 4 = m$
(2) $\beta x + 2 = 1 - 2x$ (4) $cx - 4x + 1 = 3(x + d)$

Aufgabe 8: Anwendungsaufgaben für lineare Funktionen

Stellen Sie die folgenden Szenarien als lineare Funktion mit geeignetem Definitionsbereich dar.

a) Eine Kerze mit Länge von $20cm$ brennt in einer Stunde um $0{,}8cm$ ab. Stellen Sie eine Funktionsgleichung für den Zusammenhang zwischen Zeit und Kerzenlänge auf und ermitteln Sie, wann die Kerze restlos abgebrannt sein muss.
b) In einem Vorratstank befinden sich 8600 Liter Wasser. Täglich werden dem Tank 120 Liter Wasser entnommen. Berechnen Sie nach wie viel Tagen der Tank leer ist.

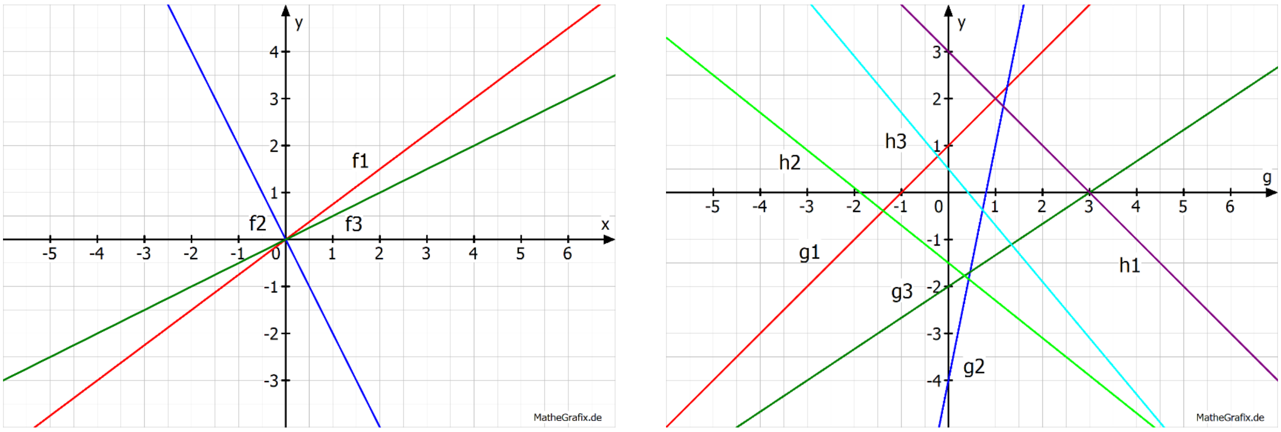
c) Eine Fabrik produziert die Ketten für Fahrräder. Das Einrichten der notwendigen Maschinen kostet 4000 €, die Herstellung jeder Kette 8 €. Wie hoch sind die Kosten nach 450 produzierten Ketten?

d)* In einem Haushalt befindet sich ein Elektroherd mit einer Leistung von $P = 2{,}5kW$. Die Kilowattstunde ($1kWh = 1kW \cdot 1h$) kostet beim Anbieter 30ct. Stellen Sie eine lineare Funktion für die Stromkosten in Euro in Abhängigkeit von der Zeit in Minuten auf. Wie lange muss der Herd auf voller Leistung gelaufen sein, damit Kosten von 6 Euro entstehen?

Lösungen: (Angaben ohne Gewähr, bei Unklarheit bitte nachfragen)

1. $f(x)=\frac{2}{3}x,\ g(x)=-x,\ h(x)=2x-1,\ k(x)=\frac{1}{2}x+1,\ l(x)=3,\ m(x)=-\frac{1}{5}x+1{,}5\ ,\ n(x)=-2x-3$

2.



3.a) (1) $m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{4-0}{2-0}=2,\ n=0,\ f(x)=2x$, **(2)** $m=-\frac{2}{3}, n=0, f(x)=-\frac{2}{3}x$, **(3)** $m=\frac{7}{5}, 5=\frac{7}{5}\cdot 7+n, n=-\frac{24}{5}$,
b) (1) $m=3$, einsetzen: $2=3\cdot 0+n,\ n=2,\ g(x)=3x+2$, **(2)** $m=\frac{2}{3}, 7=\frac{2}{3}\cdot(-3)+n,\ n=9,\ g(x)=\frac{2}{3}x+9$
c) (1) $m=-\frac{1}{m_f}=\frac{1}{4}$, Punkt einsetzen: $1=-\frac{1}{4}\cdot 1+n,\ n=\frac{5}{4},\ g(x)=-\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}$,
(2) $m=-\frac{1}{m_f}=\frac{4}{5}$, Punkt einsetzen: $0=\frac{4}{5}\cdot 1+n,\ n=-\frac{4}{5},\ g(x)=\frac{4}{5}x-\frac{4}{5}$

4.a) (1) $P_1: 2=3\cdot 1-2$ falsch, $P_2: -2=3\cdot 0-2$ wahr, $P_3: 16=3\cdot 6-2$ wahr => P_2, P_3 auf Graphen
(2) $P_1: 1=2-\frac{4}{4}$ wahr, $P_2: 1=2-\frac{0}{4}$ falsch, $P_3: 1=2-\frac{\frac{2}{3}}{4}$ falsch => nur P_1 auf Graphen
b) (1) $y_1:\ 3=2x+1, x_1=1;\ \ y_2:\ 5=2x+1, x_2=2$ **(2)** $y_1:\ 1=4-\frac{3}{7}x, x_1=7;\ \ y_2=-2, x_2=56/3$
c) (1) $f(0)=2, S_y(0;2); f(x)=7x+2=0, x=-\frac{2}{7}, S_x\left(-\frac{2}{7},0\right)$ **(2)** $S_y(0;9), S_x\left(0;\frac{27}{4}\right)$
d) (1) $-\mathbf{6}=-4x+2,\ -8=-4x\ \ P_1(\mathbf{2};-6), f(-1)=-4\cdot(-\mathbf{1})+2,\ P_2(-1;\mathbf{6}), P_3\left(\frac{2}{5};\frac{2}{5}\right), P_4\left(\frac{3}{4};-\mathbf{1}\right)\ \ y=f(x)$

5. a) (1) $x=-\frac{n}{m}, x_0=-0{,}5$ **(2)** $x_0=1$ **(3)** $x_0=-\frac{1}{3}$ **(4)** $x_0=-30$ **(5)** $x_0=-\frac{4}{3}$ **(6)** $x_0=2{,}5$
b) (1) $f(x)=g(x),\ 2x+1=5x-2, x=1, f(1)=3, S(1;3)$; **(2)** $S\left(\frac{1}{4};5\right)$, **(3)** $S(-2;7)$ **(4)** $S\left(\frac{14}{9};\frac{29}{9}\right)$

6. a) $-15, -8,\ 3{,}6=\frac{18}{5}, 10, -4{,}5$ **b)** $25, -\frac{2}{5}$, 0.6 , -1 , $\frac{1}{2}$, $-\frac{9}{20}$ (7) ist trivial wahr, $\mathcal{L}=\mathbb{R}$, (8) trivial falsch, $\mathcal{L}=\emptyset$

7. (1) $x=-3-3\alpha, \mathcal{L}=\{-3-3\alpha\}$, **(2)** $(\beta+2)x=-1$, Fall 1: $\beta\neq-2$: $\mathcal{L}=\left\{-\frac{1}{\beta+2}\right\}$ Fall 2: $\beta=-2$: $\mathcal{L}=\emptyset$
(3) $kx=m-4$, Fall 1: $k\neq 0$: $\mathcal{L}=\left\{\frac{m-4}{k}\right\}$, Fall 2a: $k=0, m\neq 4$: $\mathcal{L}=\emptyset$, Fall 2b: $k=0, m=4$: $\mathcal{L}=\mathbb{R}$
(4) $(c-7)x=3d-1$, Fall 1: $c\neq 7$: $\mathcal{L}=\left\{\frac{3d-1}{c-7}\right\}$, Fall 2a: $c=7, d\neq\frac{1}{3}$: $\mathcal{L}=\emptyset$, Fall 2b: $c=7, d=\frac{1}{3}$: $\mathcal{L}=\mathbb{R}$

8. a) Kerzenlänge $l(x)$ in cm abhängig von der Zeit x in h: $l(x)=20-0{,}8x$,
Nullstelle: $l(x)=20-0{,}8x=0,\ \ 20=\frac{4}{5}x,\ \ x_0=25$ Sinnvoller Definitionsbereich $D=[0;25]$
b) Wasservolumen im Tank $V(x)$ in l abhängig vom Wasserverbrauch x in $^{l}/_{d}$: $V(x)=8600-120x$. Nullstelle:
$V(x)=8600-120x=0,\ \ 8600=120x,\ \ x=77\frac{2}{3}$ Antwort: Nach 78 Tagen ist der Tank leer. Sinnvoller Definitionsbereich $D=\left[0;77\frac{2}{3}\right]$
c) Kosten $k(x)$ in € abhängig von der Anzahl produzierter Ketten x in €/Stck: $k(x)=8x+4000$, $x=450$ Ketten
$k(450)=8\cdot 450+4000=7600$€. Sinnvoller Definitionsbereich $D=\mathbb{N}$.
d) Gesamtverbrauch $K(x)$ in € abhängig von der Zeit x in Stunden: Nach dem ersten Satz wird in einer Stunde 2,5kW verbraucht, d.h. $2{,}5\cdot 30ct=75\,ct$, Funktionsgleichung somit: $K(x)=0{,}75x$. Zweite Frage: $0{,}75x=6, x=8h$
Sinnvoller Definitionsbereich: $D=[0;\infty)=\mathbb{R}_{\geq 0}$

Zur **Vertiefung** empfehlen wir folgende **Übungsaufgaben aus dem Skript**:

H2.1 , H3.3 , Ü3.6, Ü3.7, Ü3.8