

## Aufgabenblatt B2 : Quadratische Gleichungen

Auf dem **zweiten Arbeitsblatt des zweiten Teils** widmen wir uns nun den quadratischen Gleichungen:

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ („allgemeine Form“) bzw.}$$

$$x^2 + px + q = 0 \text{ („Normalform“ oder „normierte Form“)}$$

Eingeführt werden sie meist in der 9.Klasse, und in der Anwendung sind sie den meisten aus der Oberstufe bekannt. Die berühmte **pq-Formel** (wahlweise die **abc-Formel**) ist vielen bekannt, wird in jeder typischen Mathe-Klausur ein halbes Dutzend mal genutzt und auf Youtube ist sie zuweilen auch mal Material für ein Gitarrenlied.

Im Hochschulkontext (z.B. bei der Eigenwerttheorie und den linearen DGL), spielen diese eine besondere Rolle. Zudem werden sie in den Mathe-Vorlesungen in der Regel als gegeben hingenommen und daher allenfalls noch sehr kurz wiederholt.

Grund genug also, diese Gleichungen intensiv zu wiederholen.

Welche Fertigkeiten werden im Einzelnen auf diesem Blatt trainiert?

- Einfache Fälle (ohne lineare Glieder, ohne Absolutglieder)
- Herleitung und Anwendung der pq-Formel
- Fallunterscheidung mit Diskriminante
- Vertiefende Aufgaben, z.B. biquadratische Gleichungen

### Aufgabe 1: Einfache quadratische Gleichungen

Wir widmen uns zunächst den Spezialfällen, in denen das lineare Glied oder das Absolutglied fehlen. Hier ist der Lösungsweg meist deutlich einfacher.

a) Ermitteln Sie die Lösungsmenge der quadratischen Gleichungen ohne lineares Glied:

$$(1) \quad x^2 = 9$$

$$(5) \quad 2x^2 + 2 = 100$$

$$(9) \quad 3x^2 + 12 = 0$$

$$(2) \quad 2x^2 = 50$$

$$(6) \quad 4 - 5x^2 = -16$$

$$(10) \quad 7x^2 - 13 = 22$$

$$(3) \quad x^2 - 4 = 0$$

$$(7) \quad x^2 = 7$$

$$(11) \quad 22x^2 + 11 = 110$$

$$(4) \quad x^2 + 3 = 0$$

$$(8) \quad 1 + 3x^2 = 10$$

$$(12) \quad 5x^2 + 12 = x^2 + 3$$

b) Ermitteln Sie die Lösungsmenge der quadratischen Gleichungen ohne Absolutglied:

$$(1) \quad x^2 + 4x = 0$$

$$(4) \quad x^2 + 2x = 8x$$

$$(7) \quad 6x^2 + 8x = 0$$

$$(2) \quad x^2 - 6x = 0$$

$$(5) \quad 3x^2 + 6x = 0$$

$$(8) \quad x^2 + 4x = x(6 - x)$$

$$(3) \quad x^2 = 3x$$

$$(6) \quad \frac{x^2}{3} - \frac{5}{3}x = 0$$

$$(9) \quad \frac{x}{2}(3x + 1) = x^2 - 2x$$

### Aufgabe 2\*: Herleitung der pq-Formel

a) Lösen Sie die Gleichung  $x^2 - 6x + 5 = 0$  mit quadratischer Ergänzung (ohne Formel).

b) Leiten Sie nun die Lösungsformel für  $x^2 + px + q = 0$  her.

**Aufgabe 3: Allgemeine quadratische Gleichungen**

a) Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen mit Lösungsformel:

$$\begin{array}{ll} (1) & 0 = x^2 + 2x - 3 \\ (2) & 9 = (x + 2)^2 \\ (3) & -2(x + 2) = 2x^2 \end{array} \quad \begin{array}{ll} (4) & x^2 - 7 = -6x \\ (5) & 6 - 12x^2 = 13x^2 - 5x \\ (6) & -2x^2 + 5 - 2x = -6x - 11 \end{array}$$

b) Lösen Sie folgende quadratische Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} (1) & 0 = \frac{1}{3}x^2 - 3x + \frac{15}{4} \\ (2) & 2x^2 + 50 = 20x \\ (3) & x(2x + 2) = (x + 3)(2x - 2) \end{array} \quad \begin{array}{ll} (4) & 4x^2 - 8x + 12 = 4x - 40 \\ (5) & 0 = (x + 1)^2 - (x - 2)(x + 2) \\ (6) & (x - 5)^2 + (2x + 3)^2 = (x + 1)^2 + 97 \end{array}$$

c) Nutzen Sie den Zerlegungssatz, um die folgenden Terme zu kürzen:

$$\frac{x^2 - 10x + 24}{x - 4} = \quad \frac{-x^2 + 3x + 10}{x + 2} = \quad \frac{3x^2 - 3x - 36}{3x + 9} =$$

d) Ermitteln Sie eine quadratische Gleichung, die die Lösungen  $x_1 = 2, x_2 = 5$  hat. Rechnen Sie nach!

e) Entwickeln Sie eine quadratische Gleichung, die keine Lösung hat.

**Aufgabe 4: Vertiefende Aufgaben**

Manche Gleichungen können auf quadratische Gleichungen zurückgeführt werden. Ermitteln Sie bei den folgenden Gleichungen die Lösungsmenge:

$$\begin{array}{ll} (1) & 0 = x^3 + 2x^2 + x \\ (2) & 0 = -2x^3 + 12x^2 - 18x \end{array} \quad \begin{array}{ll} (3) & 0 = x^4 + 3x^2 - 4 \\ (4) & 0 = x^6 + 2x^3 + 1 \end{array}$$

**Lösungen: (Angaben ohne Gewähr, bei Unklarheit bitte nachfragen)****1. a)**

$$(1) \mathcal{L} = \{-3; 3\} \quad (2) \mathcal{L} = \{-5; 5\} \quad (3) \mathcal{L} = \{-2; 2\} \quad (4) \mathcal{L} = \emptyset \quad (5) \mathcal{L} = \{-7; 7\} \quad (6) \mathcal{L} = \{-2; 2\}$$

$$(7) \mathcal{L} = \{-\sqrt{7}; \sqrt{7}\} \quad (8) \mathcal{L} = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\} \quad (9) \mathcal{L} = \emptyset \quad (10) \mathcal{L} = \{-\sqrt{5}; \sqrt{5}\} \quad (11) \mathcal{L} = \left\{-2\sqrt{\frac{1}{2}}; 2\sqrt{\frac{1}{2}}\right\} \quad (12) \mathcal{L} = \emptyset$$

**1. b)**

$$(1) \mathcal{L} = \{-4; 0\} \quad (2) \mathcal{L} = \{0; 6\} \quad (3) \mathcal{L} = \{0; 3\} \quad (4) \mathcal{L} = \{0; 6\} \quad (5) \mathcal{L} = \{0; 2\}$$

$$(6) \mathcal{L} = \{0; 5\} \quad (7) \mathcal{L} = \left\{0; -\frac{4}{3}\right\} \quad (8) \mathcal{L} = \{0; 1\} \quad (9) \mathcal{L} = \{0; 5\}$$

**2. a)**

$$(x-3)^2 - 4 = 0, (x-3)^2 = 4, \quad \text{Fall 1: } x-3 = 2, x_1 = 5 \quad \text{Fall 2: } x-3 = -2, x_2 = 1 \quad \mathcal{L} = \{1; 5\}$$

**2. b)**

Herleitung über die quadratische Ergänzung mit  $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ :  $x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ ,  $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

**3. a)**

$$(1) \mathcal{L} = \{-3; 1\} \quad (2) \mathcal{L} = \{-5; 1\} \quad (3) \mathcal{L} = \emptyset \quad (4) \mathcal{L} = \{-7; 1\} \quad (5) \mathcal{L} = \{-0,4; 0,6\} \quad (6) \mathcal{L} = \{-2; 4\}$$

**3. b)**

$$(1) \mathcal{L} = \{1,5; 7,5\} \quad (2) \mathcal{L} = \{5\} \quad (3) \mathcal{L} = \{3\} \quad (4) \mathcal{L} = \emptyset \quad (5) \mathcal{L} = \{-2,5\} \quad (6) \mathcal{L} = \{-8; 5\}$$

**3. c)**

$$\frac{x^2-10x+24}{x-4} = \frac{(x-4)(x-6)}{x-4} \quad \frac{-x^2+3x+10}{x+2} = \frac{-(x+2)(x-5)}{x+2} = \quad \frac{3x^2-3x-36}{3x+9} = \frac{3(x-4)(x+3)}{3(x+3)}$$

$$= x-6 \quad (x \neq 4) \quad = -x+5 \quad (x \neq -2) \quad = x-4 \quad (x \neq -3)$$

$$3. d) (x-2)(x-5) = 0, \quad x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$3. e) \text{ jede Gleichung mit der Struktur } x^2 + q = 0 : \text{ z.B. } x^2 + 4 = 0$$

**4.**

$$(1) \mathcal{L} = \{-3; 0; 1\} \quad (2) \mathcal{L} = \{0; 3\} \quad (3) \mathcal{L} = \{-1; 1\} \quad (4) \mathcal{L} = \{-1\}$$

Zur **Vertiefung** empfehlen wir folgende **Übungsaufgaben aus dem Skript**:

H2.2 , H2.3. a), H2.4, H2.5 a),b), f)