Aufgabenblatt B5 : Elementarfunktionen und erste Eigenschaften

Wir wollen auf diesem Arbeitsblatt die elementaren Funktionen einführen und die Auswirkung von „Manipulationen“, d.h. Verschiebungen, Spiegelungen und Streckungen studieren.

Darüber hinaus werden typische Eigenschaften von Funktionen untersucht, wie Definitions-bereiche (in einfachen Fällen), Wertebereiche, Symmetrie, Periodizität, Polstellen, Asymptoten, Monotonie, Extrema und das Krümmungsverhalten. Als Ausblick wird je eine Aufgabe zur Berechnung der Umkehrfunktion und zu abschnittsweise definierten Funktionen ergänzt.

Auf diesem Blatt beschränken wir uns zunächst auf

- Potenzfunktionen $y = f(x) = x^p$ $(p \in \mathbb{R})$
- Exponentialfunktionen $y = f(x) = a^x$ $(a > 0)$
- Logarithmusfunktionen $y = f(x) = \log_a x$ $(a > 0)$
- Trigonometrische Funktionen $\sin(\cdot)$, $\cos(\cdot)$, $\tan(\cdot)$

Auf einem späteren Übungsblatt werden die Polynome und die gebrochenrationalen Funktionen untersucht. Darüber hinaus werden im Studium noch die Arcus-Funktionen, die hyperbolischen Funktionen und die Area-Funktionen eingeführt, um die Menge der Elementarfunktionen zu vervollständigen.

Aufgabe 1: Zeichnen von Funktionsgraphen (Verschiebung, Spiegelung, Streckung)

a) Skizzieren Sie die folgenden Gruppen von Funktionsgraphen jeweils auf ein Blatt und überprüfen Sie Ihre Skizze mit einem Funktionsplotter (z.B. GTR, MatheGrafix, Wolfram Alpha oder eine App Ihrer Wahl).

(1) $f(x) = x^2$, $g(x) = (x-3)^2$, $h(x) = (x+2)^2 - 3$, $k(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4$, $l(x) = \frac{1}{4}(x-1)^2$

(2) $f(x) = x^3 - 1$, $g(x) = (x-2)^3$, $h(x) = (x+1)^3 - 2$, $k(x) = 2x^3 + 2$

(3) $f(x) = \frac{1}{x^3}$, $g(x) = \frac{1}{(x-1)^3}$, $h(x) = \frac{2}{(x-3)^3}$, $k(x) = \frac{1}{(x+1)^3} + 2$, $l(x) = -\frac{4}{x^3} + 1$

(4) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $g(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$, $h(x) = \frac{2}{(x-1)^2}$, $k(x) = \frac{1}{(x+3)^2} - 3$, $l(x) = -\frac{1}{4x^2}$

(5) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sqrt{-x}$, $h(x) = \sqrt{1-x}$, $k(x) = \sqrt{2+x} + 1$, $l(x) = 3\sqrt{x-1} + 1$

(6) $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{-x}$, $h(x) = e^{3-x}$, $k(x) = -e^x + 2$, $l(x) = \frac{1}{2}e^x - 2$

(7) $f(x) = \ln(x)$, $g(x) = (\ln(3x))$, $h(x) = \ln(x+1)$, $k(x) = \ln(1-x)$

(8) $f(x) = 2\sin(x)$, $g(x) = \frac{1}{2}\sin(x) + 1$, $h(x) = 3\sin(\pi x) - 2$, $k(x) = -2\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

b) Erstellen Sie für sich ein Überblicksblatt, auf dem Sie alle wichtigen Funktionenklassen mit je mindestens 3 Beispielen zusammenfassen: Lineare Funktionen, quadratische Funktionen, Potenzfunktionen, Exponentialfunktionen, Logarithmusfunktionen, trigonometrische Funktionen.

Aufgabe 2: Der Einfluss von Parametern auf den Funktionsgraphen

a) Fassen Sie nochmal für sich zusammen, wie man eine Funktion

- Entlang der x- bzw. y-Achse streckt
- Entlang der x- bzw. y-Achse spiegelt
- Entlang der x- bzw. y-Achse verschiebt

b) Strecken Sie die Funktion $f(x) = \sin(x)$ entlang y um Faktor 3 und entlang x um Faktor2!
c) Verschieben Sie die Funktion $f(x) = x^3$ um 3 nach rechts und 4 nach unten!
d) Spiegeln Sie $f(x) = e^x$ an der x-Achse und $g(x) = \sqrt{x}$ an der y-Achse
e) Für welche a, b, c hat $f(x) = a \cdot \cos(bx) + c$ die Periodenlänge 3, Amplitude 5 und $f(0) = 4$?

Aufgabe 3: Eigenschaften von Funktionen

Im Rahmen von Funktionsuntersuchungen entstehen zahlreiche Fragestellungen zu den vielfältigen Grundbegriffen der Funktionen. Nutzen Sie die Gelegenheit, für sich selbst nochmal die folgenden Konzepte in eigenen Worten zu beschreiben, ehe Sie die Aufgaben lösen:

Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstelle, Symmetrie, Periodizität, Schnittpunkte

Diese Konzepte bilden etwa die Hälfte der Begriffe, die für Funktionen relevant sind, und kommen häufig im Laufe des ersten und zweiten Semesters in typischen Mathe-Prüfungen vor. Einige weitere lernen Sie in Aufgabe 4 kennen und wiederum weitere benötigen als Vorwissen die Differentialrechnung.

a) Ermitteln Sie für die folgenden Funktionen den maximalen Definitionsbereich:

$$f(x) = \frac{3}{x} + \frac{2x}{x-4}, \quad g(x) = \sqrt{x+1}\,, \quad h(x) = \ln(2-x)\,, \quad k(x) = \frac{\sqrt{5-x}}{x^2-4}, \quad l(x) = \ln\left(1 - \left(\frac{3}{x-1}\right)^2\right)$$

b) Ermitteln Sie für die folgenden Funktionen den Wertebereich:

$$f(x) = x^2 + 4\,, \quad g(x) = \sqrt{3x+1} + 2\,, \quad h(x) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{x}} - 1\,, \quad k(x) = 4\cos(2x+1) + 1$$

c) Ermitteln Sie die Nullstellen der folgenden Funktionen:

$$f(x) = x^2 + 5x + 6\,, \quad g(x) = \sqrt{2x+1}\,, \quad h(x) = 2^{3x} - 2\,, \quad k(x) = \ln(5x+2)$$

d) Beschreiben Sie die Symmetrieeigenschaften der folgenden Funktionen:

$$f(x) = x^4 + 3x^2 - 2\,, \quad h(x) = \frac{1}{x} - 2\sin(x)$$

e) Welche Periodenlänge haben die folgenden Funktionen?

$$f(x) = \sin(4x)\,, \quad g(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right)\,, \quad h(x) = \cos(3x+1)\,, \quad k(x) = e^{\sin(2x)}$$

f) Ermitteln Sie den Schnittpunkt von $f(x) = \frac{1}{x}$ und $g(x) = \frac{x-1}{2}$ im ersten Quadranten.

Aufgabe 4: Monotonie, Krümmung, Extrema, Wendepunkte, Asymptoten

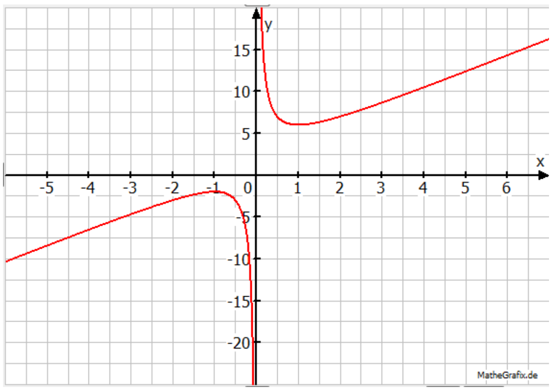
a) Skizzieren Sie die folgenden Funktionen und geben Sie an, welches Monotonie- bzw. Krümmungsverhalten Sie erkennen (ggf. auch abschnittsweise), und wo Sie Extrem- bzw. Wendepunkte sehen.

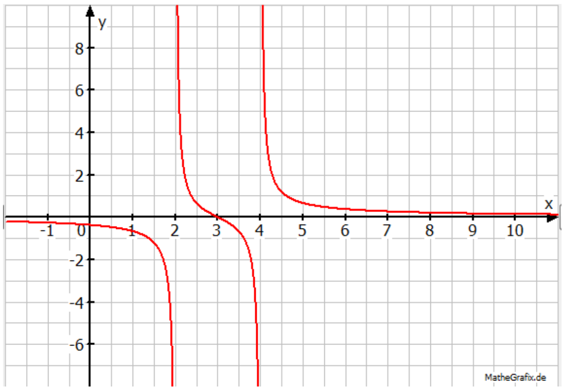
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2(x-1)^2$

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = x^3$

$h: [0,2] \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \cos(\pi x)$

b) Beschreiben Sie, welche Extrem- bzw. Wendepunkte und welche Asymptoten Sie in den folgenden Funktionsdarstellungen erkennen können.





Asymptoten:

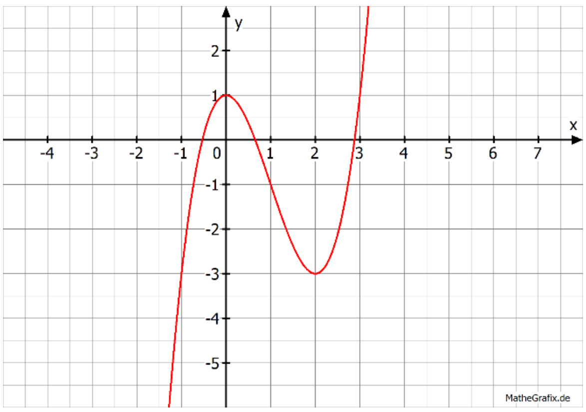
Extrempunkte:

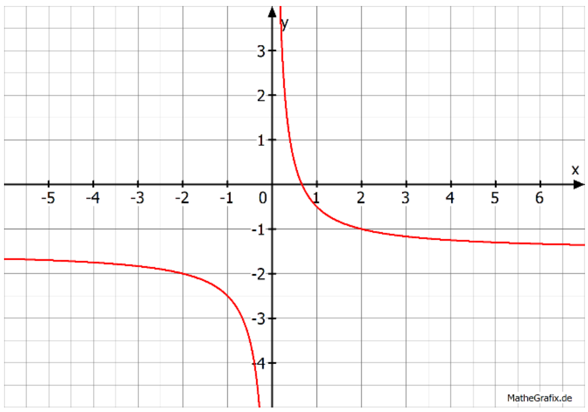
Wendepunkte:

Asymptoten:

Extrempunkte:

Wendepunkte:





Asymptoten:

Extrempunkte:

Wendepunkte:

Asymptoten:

Extrempunkte:

Wendepunkte:

Lösungen: (Angaben ohne Gewähr, bei Unklarheit bitte nachfragen)

1. Selbstkontrolle mit Funktionsplotter

2.a) Strecken entlang x um Faktor α: x durch $\frac{1}{\alpha}x$ ersetzen

Strecken entlang y um Faktor β: Funktion mit β multiplizieren (oder: y durch $\frac{1}{\beta}y$ ersetzen)

Spiegeln an y-Achse: x durch $-x$ ersetzen
Spiegeln an x-Achse: Funktion mit -1 multiplizieren (oder: y durch $-y$ ersetzen)
Verschieben entlang x um $+a$: x durch $x-a$ ersetzen
Verschieben entlang y um $+b$: Funktion um $+b$ vergrößern (oder: y durch $y-b$ ersetzen)

b) $\tilde{f}(x) = 3\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ **c)** $\tilde{f}(x) = (x-3)^3 - 4$ **d)** $\tilde{f}(x) = -e^x$, $\tilde{g}(x) = \sqrt{-x}$

e) $a = 5, b = \frac{2\pi}{3}, c = 4$

3.a) $\mathbb{R} \setminus \{0; 4\}$, $[-1, \infty)$, $(-\infty, 2)$, $(-\infty, 5] \setminus \{2; -2\}$, $(-\infty, -2) \cup (4, \infty)$

Zur letzten (sehr schweren) Teilaufgabe: Klar ist direkt $x \neq 1$, darüber hinaus gilt aber $1 - \left(\frac{3}{x-1}\right)^2 > 0$,

d.h. $1 > \left(\frac{3}{x-1}\right)^2$, umgeformt: $(x-1)^2 > 9$, d.h. $|x-1| > 3$, also $x > 4$ oder $x < -2$.

b) $[4, \infty)$, $[2, \infty)$, $(-1, \infty)$, $[-3{,}5]$

c) Von f: -2,-3 Von g: $x_0 = -\frac{1}{2}$ Von h: $x_0 = \frac{1}{3}$ Von k: $x_0 = -\frac{1}{5}$

d) $f(x) = x^4 + 3x^2 - 2$ gerade ; $h(x) = \frac{1}{x} - 2\sin(x)$ ungerade

e) $p_f = \frac{\pi}{2}$, $p_g = 2\pi$, $p_h = \frac{2}{3}\pi$, $p_k = \pi$

f) $\frac{1}{x} = \frac{x-1}{2}$, $2 = x^2 - x$, $x^2 - x - 2 = 0$, $x_{1,2} = -\frac{-1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2}$, $S(2; 0{,}5)$

4.a)

$f(x) = 2(x-1)^2$ der Extrempunkt liegt bei $(1; 0)$, es gibt keinen Wendepunkt, monoton fallend für $-\infty < x < 1$, monoton steigend für $1 < x < \infty$

$g(x) = x^3$ Es gibt keinen Extrempunkt. Wendepunkt liegt bei $(0; 0)$, monoton steigend auf ganz $\mathbb{R}$

$h(x) = \cos(\pi x)$ Extrempunkte: $(0; 1)$ und $(2; 1)$ sind Hochpunkte, $(1; -1)$ ist ein Tiefpunkt,
Wendepunkte: $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ und $\left(\frac{3}{2}; 0\right)$, monoton fallend für $0 < x < 1$, monoton steigend für $1 < x < 2$

b) Die abgebildeten Funktionen sind:

$f(x) = \frac{2(x+1)^2}{x} - 2$ mit Asymptoten $x = 0$ und $y = 2x + 2$. Extrema liegen bei $x = \pm 1$, Wendepunkte gibt es keine.

$f(x) = \frac{x-3}{(x-2)(x-4)}$ mit den Asymptoten $x = 2, x = 4$ und $y = 0$. Extrema gibt es keine, ein Wendepunkt liegt bei $(3; 0)$

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ keine Asymptote, Extrempunkte liegen bei $(0; 1)$ und $(2; -3)$, ein Wendepunkt liegt bei $(1; -1)$

$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{2x^3} - 2$ waagerechte Asymptote bei $x = -1{,}5$ keinen Extrem- und keinen Wendepunkt

Zur **Vertiefung** empfehlen wir folgende **Übungsaufgaben aus dem Skript**:

H2.1 , H3.3 , Ü3.6, Ü3.7, Ü3.8