Aufgabenblatt C1 : Mengenlehre, Summenzeichen

Eine der wichtigsten Grundfertigkeiten der Hochschulmathematik ist der Umgang mit der **Mengensprache** und Erfahrung in den **Mengendarstellungen**.

Eine Menge ist dabei etwas sehr grundlegendes in der Mathematik, weshalb es hier keine formale Definition gibt, sondern lediglich eine allgemeinverständliche Metapher:

Eine Menge ist die Zusammenfassung mehrerer Objekte zu einem Ganzen, vorstellbar z.B. als eine Schublade, in die verschiedene Dinge gepackt werden oder in als eine Kiste, die mit Objekten (z.B. auch anderen Kisten) beladen wird.

Im ersten Schritt gilt es daher, die verschiedenen Methoden, Mengen zu beschreiben, zu lernen, insbesondere die **aufzählende** und die **beschreibende Darstellung**. Darüber hinaus benötigen wir die Symbole $\in$ (**Element**) und $\subseteq$ (**Teilmenge**). Die Menge aller Teilmengen, genannt **Potenzmenge**, einer Menge A wird darüber hinaus mit $\mathcal{P}(A)$ bezeichnet.

Haben wir mehrere Mengen, können wir zudem **mit ihnen rechnen**, d.h. Vereinigungen, Schnittmengen, Komplemente und Mengendifferenzen bestimmen, dargestellt über die Operatoren $\cup, \cap, \setminus$ und $\bar{\cdot}$. Darüber hinaus können zwei (oder mehr) Mengen mit dem **kartesischen Produkt** $\times$ verknüpft werden.

Welche Fertigkeiten werden im Einzelnen auf diesem Blatt trainiert?

- Mengen und ihre Darstellungsformen
- Mengenoperatoren
- Teilmengenbeziehung und VENN-Diagramme
- Kartesische Produkte und Bereiche im $\mathbb{R}^2$

Aufgabe 1: Mengen und ihre Darstellungsformen

a) Geben Sie folgende Mengen in aufzählender Schreibweise an:

$A = \{x \in \mathbb{Z} | -5 \leq x < 3\}$ $\quad B = \{k^2 + 1 | 2 < k \leq 6,\ k \in \mathbb{Z}\}$;

$C = \{x \in \mathbb{N} | -8 \leq x \leq -2\}$ $\quad D = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| 2x^2 + x - \frac{8}{3} = \frac{1}{3}x\right\}$

$E = \{x \in \mathbb{R} | x^2 + 4x - 5 = 0\}$ $\quad F = \left\{k \in \mathbb{N} \middle| k^2 - k + \frac{3}{4} = 0\right\}$

$G = \{n \in \mathbb{N} |\ n \text{ ist geradzahliger Teiler von } 24\}$

b) Geben Sie folgende Mengen in definierender Schreibweise an:

$A = \{3,6,9,12,15,18\}$ $\quad B = \{1,4,9,16,25,36,49\}$

$C = \{a, e, i, o, u\}$ $\quad D = \left\{1, \frac{1}{8}, \frac{1}{27}, \frac{1}{64} \ldots\right\}$

$E = \{1,3,5,7,9,11,13,15 \ldots\}$ $\quad F = \{2,3,5,7,11,13,17,19\}$

c) Schreiben Sie die gegebenen Intervalle auf den reellen Zahlen in die definierende Mengenschreibweise um: $[0,5]$; $(-2,3]$; $[4,13)$; $(-1, \infty)$

Aufgabe 2: Mengenoperationen

a) Berechnen Sie für $A = \{1,3,7\}$, $B = \{1,2\}$, $C = \{4,3,2\}$, $D = \{2,4,6,8\}$ auf $\Omega = \{1 \dots 8\}$:

$\bar{C}$; $B \cap A$; $(A \cup B) \cap C$; $(\bar{A} \cap B) \setminus \bar{C}$; $(\bar{D} \setminus A) \cup B$; $\overline{B \cup C}$

b) Es seien folgende Intervalle auf den reellen Zahlen gegeben:

$A = \{x \in \mathbb{R} | -3 \leq x \leq 5\}$; $B = (-\infty, 2]$; $C = [0,3]$

Berechnen Sie damit folgende Mengen und stellen Sie diese grafisch auf einem Zahlenstrahl dar:

$A \cup B \cup C$; $A \cap B$; $\bar{A} \cap C$; $\bar{B} \cup C$

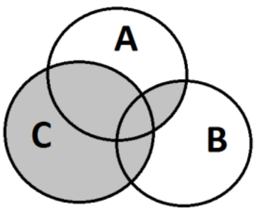
Aufgabe 3: Die Teilmengenbeziehung

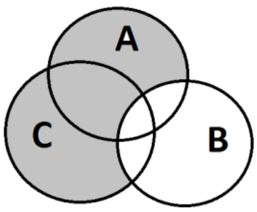
Welche der folgenden Mengen stehen in Teilmengenbeziehung zueinander?

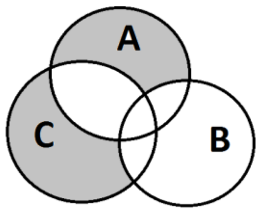
$A = \{1,2,3\}$; $B = \{2,3,5,6\}$; $C = \emptyset$; $D = \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ Primzahl, } p < 5\}$
$E = \{k \in \mathbb{N} \mid k \text{ ist Teiler von } 12\}$; $F = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ ist Teiler von } 6\}$

Aufgabe 4: VENN-Diagramme

a) Beschreiben Sie die schraffierten Flächen in folgenden VENN-Diagramme durch Mengenoperationen:







b) *A*, *B* und *C* seien gegeben mit $A \cap B \cap C \neq \emptyset$ (s. oben). Stellen Sie folgende Ausdrücke mit Venn-Diagrammen dar:

$(\bar{A} \cap B) \cup C$; $B \setminus \overline{(A \cup C)}$; $(C \cup B) \cap \big(A \cup (B \cap C)\big)$

c)* Überprüfen Sie die Gültigkeit folgender Mengengleichungen mit Venn-Diagrammen:

1) $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$
2) $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus (C \setminus A)$

Aufgabe 5: Kartesische Produkte und Bereiche des $\mathbb{R}^2$

a) Skizzieren Sie die durch folgende kartesischen Produkte gegebenen Mengen in ein ebenes Koordinatensystem: $A = [1,2] \times [2,4]$ $B = [0,3] \times \{1,2,3\}$.

b) Listen Sie alle Elemente von $\{1,2,3\} \times \{a, b\}$ auf.

c) Skizzieren Sie die Bereiche des $\mathbb{R}^2$, die durch folgende Mengen definiert werden:

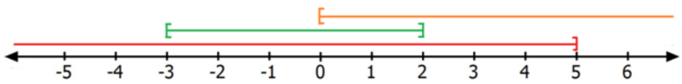
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 4\}$; $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | (x-2)^2 + y^2 = 9\}$;
$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | -1 \le x \le 3, x^2 + 2 \le y \le 2x + 5\}$

Lösungen: (Angaben ohne Gewähr, bei Unklarheit bitte nachfragen)

1. a) $A = \{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2\}$; $B = \{10,17,26,37\}$; $C = \emptyset$; $D = \left\{-\frac{4}{3}, 1\right\}$;
$E = \{-5,1\}$; $F = \emptyset$; $G = \{2,4,6,8,12,24\}$

b) $= \{3 \cdot x | 1 \le x \le 6\}$; $B = \{k^2 | 1 \le k \le 7\} = \{k^2 | k \in \mathbb{N}, k \le 7\}$; $C = \{x |\, x \text{ ist ein Vokal}\}$;
$D = \left\{\frac{1}{n^3} \middle| n \in \mathbb{N}\right\}$; $E = \{n \in \mathbb{N} | n \text{ ungerade}\} = \{2k+1 | k \in \mathbb{N}\}$; $F = \{n \in \mathbb{N} | n \text{ Primzahl}, n \le 19\}$

c) $[0,5] = \{x \in \mathbb{R} | 0 \le x \le 5\}$; $(-2,3] = \{x \in \mathbb{R} | -2 < x \le 3\}$;
$[4,13) = \{x \in \mathbb{R} | 4 \le x < 13\}$; $(-1,\infty) = \{x \in \mathbb{R} | x > -1\}$



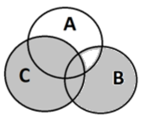
2. a) $\bar{C} = \{1,5,6,7,8\}$; $B \cap A = \{1\}$; $(A \cup B) \cap C = \{2,3\}$;
$(\bar{A} \cap B) \setminus \bar{C} = \{2\}$; $(\bar{D} \setminus A) \cup B = \{1,2,5\}$; $\overline{B \cup C} = \{5,6,7,8\}$

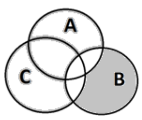
b) $A \cup B \cup C = (-\infty, 5]$; $A \cap B = [-3,2]$; $\bar{A} \cap C = \emptyset$; $\bar{B} \cup C = [0,\infty)$

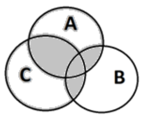
3. $C \subseteq A, B, C, D, E, F$ (Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge); $A \subseteq E$; $A \subseteq F$; $B \subseteq E$; $D \subseteq B$; $F \subseteq E$

4. a) $C \cup (A \cap B)$; $(A \cup C) \setminus B$; $\overline{B \cup (A \cap C)}$

b)

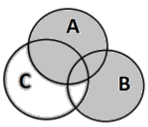


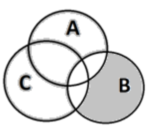


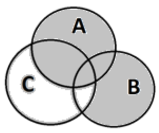


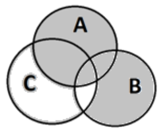
c)* 1) stimmt nicht, 2) stimmt. Begründung:

$A \cup (B \setminus C)$ $(A \cup B) \setminus (A \cup C)$; $A \cup (B \setminus C)$ $(A \cup B) \setminus (C \setminus A)$

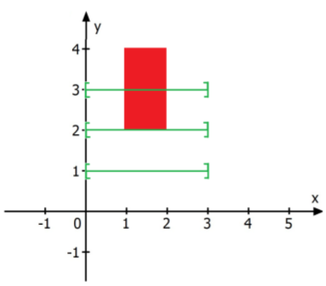




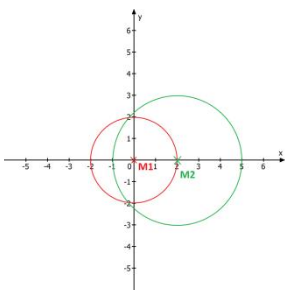




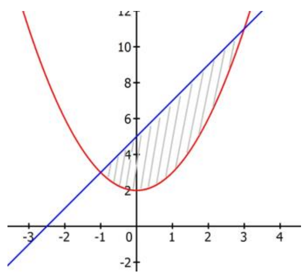
5. a)



c) A,B



c) C



b) $\{1,2,3\} \times \{a, b\} = \{(1,a), (2,a), (3,a), (1,b), (2,b), (3,b)\}$

Zur **Vertiefung** empfehlen wir folgende **Übungsaufgaben aus dem Skript**:

H1.23, H1.24, H1.25, Ü1.30, Ü1.31, Ü1.32