

Großer Test zu Teil C : Mengenlehre, Summen, Polynome, Betrag

Mit diesem **Abschlusstest** wollen wir den dritten Themenblock des Vorkurses abschließen. Der Abschlusstest ist auf 75 min angelegt, und dient als Gradmesser für Ihre erworbenen Fertigkeiten im Umgang mit Funktionen und Gleichungen, insbesondere in den Themen:

- Darstellungsweisen von Mengen, Intervalle
- Mengenoperationen, Teilmengen, Potenzmengen, kartesisches Produkt
- Polynome, Faktorisieren, Nullstellen mit Vielfachheit
- Gebrochenrationale Funktionen, Polynomdivision, Pol-/Nullstellen, Lücken
- Beträge auflösen, Betragsgleichungen, Betragsungleichungen

Die Fertigkeiten von Teil C werden in der Regel in den ersten 2-3 Studienwochen noch einmal in der Hochschulmathematik aufgegriffen, allerdings in sehr hoher Geschwindigkeit und neben anderen neuen Grundlagen. Nutzen Sie daher jetzt die Zeit des Vorkurses, diese Grundlagen noch einmal so zu festigen, dass Sie in den ersten Studienwochen so gut wie möglich mithalten können. Viel Erfolg!

Aufgabe 1: Mengendarstellungen und Mengenoperationen (12 Punkte)

a) **[4]** Formen Sie die Mengen in die aufzählende Schreibweise um: (je 1 Pkt.)

$$A = \{k \in \mathbb{N} \mid k \text{ ist Teiler von } 20, 3 \leq k < 12\} =$$

$$B = \{3t + 1 \mid t \in \mathbb{N}_0\} =$$

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 8x^2 + 12x = 0\} =$$

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid 2^{3x-1} = 8\} =$$

b) **[2]** Schreiben Sie die Mengen in der beschreibenden Schreibweise: (je 1 Pkt.)

$$E = \{5, 10, 15, 20, 25, \dots\} =$$

$$F = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{6}, \frac{9}{8}, \frac{11}{10}, \dots \right\} =$$

c) **[3]** Gegeben seien die Mengen $A = \{1, 2, 3, 5, 6\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, $C = [1, 3)$, $D = (2, 3]$ und die Grundmenge $\Omega = [1, 6]$. Skizzieren Sie auf der Zahlengeraden: (je $\frac{1}{2}$ Pkt.)

$$A \cap B, A \cap (C \cap D), C \setminus A, \bar{D}, B \cup (D \setminus C), A \cup \bar{D}$$

d) **[1]** Geben Sie alle Teilmengenbeziehungen zwischen den Mengen

$$A = \{5, 6, 7\}, B = [5, 7], C = (5, 7] \text{ an!}$$

e) **[2]** Stellen Sie den Potenzmengenverband der Menge $M = \{x, y, z\}$ dar

Zusatzaufgabe: (3 Extra-Punkte)

Wieviele Elemente haben die Potenzmengen $\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\})$ bzw. $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$?

Wieviele 5-elementige Teilmengen hat die Menge $\{1, 2, 3, \dots, 12\}$?

Aufgabe 2: Das kartesische Produkt (6 Punkte)

a) [3] Skizzieren Sie die folgenden Mengen: (je ½ Pkt.)

$\{1,2,3\} \times \{2,4\}$

$[1,3] \times [2,3]$

$[1,3] \times \{1,2\}$

$(1,4) \times (2,3)$

$\{2,3,4\} \times [1,2]$

$[1,5]^2 \cap (3,6]^2$

b) [2] Gegeben sei die Relation $R \subseteq A \times A$, $A = \{1,2,3,4,5\}$ mit

$$R = \{(1,3), (3,2), (3,3), (4,5), (5,1), (5,2), (5,4), (5,5)\}$$

Stellen Sie diese Relation in einer Kreuztabelle und in einem Pfeildiagramm dar.

c) [1] Berechnen Sie $|D|$ für $D = A \times B$, $A = \{1,2, \dots, 10\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$.**Aufgabe 3: Das Summenzeichen (6 Punkte)**

a) [3] Schreiben Sie die folgenden Summen aus: (je 1 Pkt.)

$$\sum_{k=0}^5 (2k+1)^2 = \quad \sum_{k=4}^7 \frac{k-1}{k!} = \quad \sum_{k=10}^{40} \frac{1}{k-5} =$$

b) [3] Fassen Sie die folgenden Summen mit einem Summenzeichen zusammen: (je 1 Pkt.)

$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \dots + 28 =$

$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5 =$

$3 + \frac{9}{2} + \frac{27}{6} + \frac{81}{24} + \frac{243}{120} =$

Aufgabe 4: Polynome (12 Punkte)a) [6] Faktorisieren Sie die folgenden Polynome und geben Sie alle Nullstellen mit Vielfachheit an: (f, g je 1 Pkt., h, k je 2 Pkt.)

$f(x) = x^6 - 10x^4 + 16x^2$

$g(x) = x^5 + 5x^4 - 6x^3$

$h(x) = x^5 + x^4 - 5x^3 - 5x^2 + 4x + 4$

$k(x) = x^5 - 15x^4 + 76x^3 - 140x^2 + 75x - 125$

b) [4] Skizzieren Sie die Polynome aus Aufgabe a)

c) [2] Ermitteln Sie ein Polynom möglichst niedrigen Grades, das eine zweifache Nullstelle $x_1 = 3$ und eine zweifache Nullstelle $x_2 = -3$ besitzt

Aufgabe 5: Gebrochenrationale Funktionen (10 Punkte)

a) [4] Ermitteln Sie für die folgenden gebrochenrationalen Funktionen die Asymptote und den echt gebrochenrationalen Rest: (je 2 Pkt.)

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - 1}{x + 4} \qquad g(x) = \frac{6x^6 - 3x^4 + 2x}{3x^5 + x^4 + 1}$$

b) [6] Ermitteln Sie für die folgenden gebrochenrationalen Funktionen alle Polstellen, Nullstellen und Lücken und skizzieren Sie den Kurvenverlauf: (je 2 Pkt.)

$$f(x) = \frac{x}{(x-4)^2} \qquad g(x) = \frac{x-3}{x \cdot (x-1)} \qquad h(x) = \frac{(x-3)(x+2)^2}{(x+2)^3(x-3)}$$

Zusatzaufgabe: (2 Extra-Punkte)

Skizzieren Sie den Kurvenverlauf von

$$g(x) = \frac{(x-3)^4(x+1)^2}{(x^2-4x+4)(x^2-1)}$$

Aufgabe 6: Der Betrag (14 Punkte)

a) [6] Geben Sie die vollständige Fallunterscheidung an für die folgenden Betragsterme: (je 1 Pkt.)

$$|4-x| = \left\{ \qquad \qquad \qquad |x^2-9| = \left\{ \right.$$

$$|x+3| = \left\{ \qquad \qquad \qquad |27-3^x| = \left\{ \right.$$

$$|2x+6| = \left\{ \qquad \qquad \qquad |x^2-6x| = \left\{ \right.$$

b) [4] Ermitteln Sie die Lösungsmengen der folgenden Betragsgleichungen:

$$|x-3| = 5 \qquad |x+1| = -6$$

$$|2x-4| = x+2 \qquad |x+1| + |3x-6| = 10$$

c) [4] Ermitteln Sie die Lösungsmengen der folgenden Betragsungleichungen:

$$|x-2| \leq 2 \qquad |x+6| > 1$$

$$|2x-4| \leq 6 \qquad |x-1| - |2x+4| > 4$$

Gesamt-Auswertung: Teil C

Ergebnis Test C-1	/10
Ergebnis Test C-2	/15
Ergebnis Test C-3	/15
Ergebnis Klausur B	/60
Summe	/100

Bei diesen Themen habe ich spürbare Fortschritte gegenüber dem alten Schulwissen bzw. Teil A und B gemacht:

Diese Themen habe ich komplett neu kennengelernt:

Diese Themen sollte ich nochmal trainieren: