Aufgabenblatt C2 : Polynome und gebrochenrationale Funktionen

Mit den **Polynomen** untersuchen wir in dieser Kurseinheit die einfachste Funktionenklasse der Mathematik. Polynome (auch: „rationale Funktionen") sind Funktionen der Art

$$\boldsymbol{p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}$$

Sie lassen sich relativ gut berechnen, leicht ableiten und leicht integrieren. Will man mathematische Operationen in Computerchips verbauen, implementiert man statt den mathematischen Funktionen oft Polynome als Näherung (Stichwort: Taylor-/Potenzreihen).

In diesem Übungsblatt konzentrieren wir uns darauf, die Nullstellen von Polynomen zu ermitteln bzw. sie zu „faktorisieren", oder aus gegebenen Nullstellen ein Polynom zusammenzusetzen.

Unsere Ziele für dieses Übungsblatt:

- Methoden zur Faktorisierung von Polynomen: pq-Formel, biquadr. Polynome
- HORNER-Schema, Polynomdivision
- Herstellung eines Polynoms aus gegebenen Nullstellen
- Gebrochenrationale Funktionen: Nullstellen, Polstellen, Lücken, Asymptoten
- im $\mathbb{R}^2$

Aufgabe 1: Wiederholung: Elementare Nullstellenmethoden

Bestimmen Sie die reellen Nullstellen der folgenden Polynome (mit Vielfachheiten) und faktorisieren Sie sie!

$f(x) = 2x^2 + 4x + 2$

$g(x) = x^4 - 13x^2 + 36$

$h(x) = x^4 + 7x^3 + 10x^2$

$k(x) = (x^2 + 1)(x - 3)^2(3x^2 - 12x + 9)$

Aufgabe 2: Polynomdivision

a) Führen Sie die Polynomdivision durch und überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch Multiplikation!

$(x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 7x + 4) : (x + 4) =$

$(3x^5 + 2x^4 - 2x^2 + 4) : (x^2 + 2x - 1) =$

b) Ermitteln Sie mit Polynomdivision, wie Sie $\frac{x^3-27}{x-3}$ und $\frac{x^4-a^4}{x-a}$ kürzen können!

c)* Versuchen Sie, einen Teil der Aufgabe a) und die komplette Aufgabe b) mit HORNER-Schema zu lösen!

Aufgabe 3: Polynome faktorisieren

Bestimmen Sie bei den folgenden Polynomen alle reellen Nullstellen (mit Vielfachheit) und geben Sie die Zerlegung in Linearfaktoren an.

$p_1(x) = x^7 + 3x^6 - 9x^5 - 23x^4 - 12x^3$

$p_2(x) = 2x^7 - 2x^6 - 4x^5 + 4x^4 - 14x^3 + 14x^2 - 8x + 8$

Aufgabe 4: Polynome aus Nullstellen bilden

a) Geben Sie dasjenige reelle Polynom $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ an, das die Nullstelle $x_1 = 1$ mit Vielfachheit 2 und die Nullstelle $x_2 = -3$ mit Vielfachheit 1 hat und für das $p(-1) = 16$ gilt.

b)* Geben Sie ein <u>reelles</u> Polynom möglichst niedrigen Grades an, das mindestens die Nullstellen $x_1 = -4$ und $x_2 = 3i$ besitzt.

c)* Geben Sie ein <u>reelles</u> Polynom möglichst niedrigen Grades an, das mindestens die zweifache Nullstelle $x_1 = 1 + 2i$ besitzt.

Aufgabe 5: Gebrochenrationale Funktionen A

Gegeben sei die gebrochenrationale Funktion

$$f(x) = \frac{(x+2)^3(x^2-4)(x-5)^3}{(x-3)(x+2)^2}$$

a) Bestimmen Sie alle Polstellen, Nullstellen und Lücken von f.

b) Skizzieren Sie f, indem Sie alle Polstellen, Nullstellen und Lücken sowie das Verhalten im Unendlichen korrekt darstellen.

Aufgabe 6: Gebrochenrationale Funktionen B

Gegeben sei die gebrochenrationale Funktion

$$f(x) = \frac{x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4}{x^3 - x^2 + 4x - 4}$$

a) Bestimmen Sie alle Polstellen, Nullstellen und Lücken von f.

b) Bestimmen Sie die Asymptote von f.

Lösungen: (Angaben ohne Gewähr, bei Unklarheit bitte nachfragen)

1.

$f(x) = 2(x+1)^2$ Nst: -1 (2fach)

$g(x) = (x+3)(x-3)(x+2)(x-2)$ Nst: 2,-2,3,-3 (jeweils 1fach)

$h(x) = x^2(x+2)(x+5)$ Nst: 0 (2fach), -2,-5 (jeweils 1fach)

$f(x) = 3(x^2+1)(x-3)^3(x-1)$ Nst: 3 (3fach), 1 (1fach)

2. a)

$(x^4 - 4x^3 - 2x^2 - 7x + 4) : (x+4) = (x^3 - 2x + 1)$

$(3x^5 + 2x^4 - 2x^2 + 4) : (x^2 + 2x - 1) = (3x^3 - 4x^2 + 11x - 28) + \dfrac{67x - 24}{x^2 + 2x - 1}$

b) $\frac{x^3-27}{x-3} = x^2 + 3x + 9$, $\frac{x^4-a^4}{x-a} = x^3 + ax^2 + a^2x + a^3$

c) Die erste Aufgabe aus a) kann man mit HORNER schneller lösen

3.

$p_1(x) = x^3(x+1)^2(x-3)(x+4)$ Nst: 0 (3fach), -1 (2fach), 3,-4 (je einfach)

$p_2(x) = 2(x^2+1)^2(x-2)(x+2)(x-1)$ Nst: 2,-2,1 (je einfach)

4. a) $p(x) = a(x-1)^2(x+3) = a(x^3 + x^2 - 5x + 3)$, mit Einsetzen folgt dann: $a = 2$

b) $p(x) = (x+4)(x^2+9) = x^3 + 4x^2 + 9x + 36$

c) $p(x) = \big(x - (1+2i)\big)^2\big(x - (1-2i)\big)^2 = ((x-1)^2 + 4)^2 = (x^2 - 2x + 5)^2$

$= x^4 - 4x^3 + 14x^2 - 20x + 25$

5. a) Polstellen: 3 **Lücken:** -2 **Nullstellen:** 2,5

b) Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit einem Funktionsplotter oder Grafiktaschenrechner

6. Sinnvoller Schritt zu Beginn: $f(x) = \frac{x^4-2x^2-3x^3+4x+4}{x^3-x^2+4x-4} = \frac{(x-2)^2(x+1)^2}{(x^2+4)(x-1)}$

a) Polstellen: 1 **Lücken:** keine **Nullstellen:** -1, 2

b) Per Polynomdivision aus der Ausgangsfunktion:

$f(x) = \frac{x^4-2x^3-3x^2+4x+4}{x^3-x^2+4x-4} = x - 1 + \frac{-8x^2+12x}{x^3-x^2+4x-4}$, also $a(x) = x - 1$

Zur **Vertiefung** empfehlen wir folgende **Übungsaufgaben aus dem Skript**:

Polynome:	H2.3, H2.5, Ü2.6, Ü2.7, Ü2.8, Ü3.10, Ü3.11
Gebrochenrationale Funktionen:	H3.7, H3.8, H3.9, Ü3.12, Ü3.13, Ü3.14