Aufgabenblatt C3: Betragsgleichungen

Welche Fertigkeiten werden im Einzelnen auf diesem Blatt trainiert?

- Beträge definieren
- Einfache Betragsgleichungen
- Betragsfunktionen skizzieren

Aufgabe 1: Beträge auflösen

(1)	$\|x+4\| =$	(4)	$\|\sqrt{x}-2\| =$
(2)	$\|x^2+2x\| =$	(5)	$\|2^x-8\| =$
(3)	$\|-2\sin x\| =$ (nur $0 \le x \le 2\pi$)	(6)	$\|\ln(x+1)\| =$

Aufgabe 2: Lösen von Betragsgleichungen

a)

(1)	$\|x-3\| = 6$	(4)	$\|x^2+2x\| = 8$
(2)	$\|3+2x\| = 4$	(5)*	$\|x^2-6x+1\| = 8$
(3)	$\|x-8\| = -2$	(6)	$\|(x-2)^2\| = 16$

b)

(1)	$\|x-4\| = 2x+1$	(3)	$x - \|x+3\| = 3(x+2)$
(2)	$2 \cdot \|x-4\| - 6x = -2$	(4)	$\frac{2x-1}{\|x-2\|} = 4$

c)

(1)	$\|2x\| = \|x-1\|$	(2)	$\|x-1\| + \|x+5\| = 6$

Aufgabe 3: Betragsfunktionen

Skizziere folgende Funktionsgraphen. An welcher Stelle x_0 entsteht der „Knicke“?

$f(x) = \|x-2\|$ $g(x) = \|x^2+2x-3\|$	$h(x) = \|(x+3)^3\|$ $k(x) = \|\sqrt{x}-4\|$	$l(x) = \|\ln x\|$ $m(x) = \|2^x-1\|$

Lösungen: (Angaben ohne Gewähr, bei Unklarheit bitte nachfragen)

1.

(1)	$\lvert x+4\rvert = \begin{cases} x+4, & x \geq -4 \\ -x-4, & x < -4 \end{cases}$	(4)	$\lvert\sqrt{x}-2\rvert = \begin{cases} \sqrt{x}-2, & x \geq 4 \\ -\sqrt{x}+2, & 0 < x < 4 \end{cases}$
(2)	$\lvert x^2+2x\rvert = \begin{cases} x^2+2x, & (-\infty,-2] \text{ und } [0,\infty) \\ -x^2-2x, & -2 < x < 0 \end{cases}$	(5)	$\lvert 2^x-8\rvert = \begin{cases} 2^x-8, & x \geq 3 \\ -2^x+8, & x < 3 \end{cases}$
(3)	$\lvert -2\sin x\rvert = \begin{cases} 2\sin x\,, & 0 \leq x \leq \pi \\ -2\sin x, & \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$	(6)	$\lvert\ln(x+1)\rvert = \begin{cases} \ln(x+1)\,, & x > -1 \\ -\ln(x+1)\,, & -1 < x < 0 \end{cases}$

2. a)

(1) (2) (3)	$x-3 = \pm 6$ $x = \pm 6 + 3, \quad \mathcal{L} = \{-3; 9\}$ $3+2x = \pm 4$ $x = \frac{\pm 4 - 3}{2}, \quad \mathcal{L} = \left\{-\frac{7}{2}; \frac{1}{2}\right\}$ $\lvert x-8\rvert = -2, \quad \mathcal{L} = \{\ \}$	(4)	$\lvert x^2+2x\rvert = 8$ Fall 1 für $x \geq 0 \vee x \leq -2$ und $x^2+2x \geq 0$: $x^2+2x-8=0, \ x_1 = 2, \ x_2 = -4, \ \mathcal{L} = \{-4; 2\}$ Fall 2 $x > -2 \ \wedge \ x < 0$ und $-(x^2+2x) < 0$: $-x^2-2x-8=0$, keine Lösung
(6)	$\lvert(x-2)^2\rvert = 16, \mathcal{L} = \{-2; 6\}$	(5)*	$\lvert x^2-6x+1\rvert = 8$ Definitionsbreich für Fall 1 und 2: $x^2-6x+1=0$, $x_1 = 3-2\sqrt{2}, \ x_2 = 3+2\sqrt{2}$, $\lvert x^2-6x+1\rvert - 8 = 0$ Fall 1 für $x \geq 3+2\sqrt{2} \vee x \leq 3-2\sqrt{2}$: $x^2-6x+1 \geq 0, \ x^2-6x-7=0$, $x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9+7}, \ x_1 = -1, \ x_2 = 7$ Fall 2 für $x > 3-2\sqrt{2} \ \wedge \ x < 3+2\sqrt{2}$: $x^2-6x+1 < 0, \ x^2-6x+9=0$, $(x-3)^2 = 0, \ x_3 = 3, \ \mathcal{L} = \{-1; 3; 7\}$

2. b)

(1)	Fall 1 für $x \geq 4$: $x-4 = 2x+1, \ x = -5$ (keine Lösung) Fall 2 für $x < 4$: $-x+4 = 2x+1, \ x = 3, \mathcal{L} = \{3\}$	(3)	Fall 1 für $x \geq -3$: $x - x + 3 = 3x+6, \ x = -1$ Fall 2 für $x < -3$: $x - (-x-3) = 3x+6$, $x = -3\,, \ \mathcal{L} = \{-1\}$
(2)	Fall 1 für $x \geq -6$: $2x+12-6x = -2, \ x = 3{,}5$ Fall 2 für $x < -6$: $-2x-12-6x = -2, \ x = -\frac{5}{4}$, $\mathcal{L} = \{3{,}5\}$	(4)	$D = \mathbb{R}\backslash\{2\}$ Fall 1 für $x > 2$: $2x-1 = 4x-8, \ x = -3{,}5$ Fall 2 für $x < 2$: $2x-1 = -4x+8$, $x = -\frac{3}{2}, \ \mathcal{L} = \{-1{,}5; 3{,}5\}$

2. c)

(1)	Fall 1 für $\boldsymbol{x \geq 0}$: Fall 1a für $x \geq 1$: $2x = x - 1, \quad x = -1$, keine Lsg., da nicht ≥ 1 Fall 2 für $\boldsymbol{x < 0}$: Fall 2a für $x \geq 1$: Außerhalb des gesuchten Bereichs	Fall 1b für $x < 1$: $2x = -x + 1, \quad x = \frac{1}{3}$ Fall 2b für $x < 1$: $-2x = -x + 1, \quad x = -1, \quad \mathcal{L} = \left\{-1; \frac{1}{3}\right\}$
(2)	Fall 1 für $\boldsymbol{x \geq 1}$: Fall 1a für $x \geq -5$: $x + x + 5 = 7, \quad x = 1$ Fall 2 für $\boldsymbol{x < 1}$: Fall 2a für $x \geq -5$: $-x + x + 5 = 5, \quad 5 = 5 \text{ w. A.}$	Fall 1b für $x < 5$: außerhalb des gesuchten Bereichs Fall 2b für $x < 5$: $-x - (x + 5) = 5, \quad x = -5, \text{keine Lsg.},$ $\mathcal{L} = \{x \| -5 \leq x \leq 1\}$

3.

$f(x)$: Knick bei $x_0 = 2$ $g(x)$: Knick zwischen $x_1 = -3$ und $x_2 = 1$	$h(x)$: Knick bei $x_0 = -3$ $k(x)$: Knick bei $x_0 = 16$	$l(x)$: Knick bei $x_0 = 1$ $m(x)$: Knick bei $x_0 = 0$