Aufgabenblatt D1 : Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Die **Vektorrechnung** ist eins der Fundamente der modernen Ingenieursmathematik. Während die Anfänge der Theorie darauf zurückgingen, geometrische Probleme rein analytisch (ohne Zeichnen) zu lösen, sind die Vektoren, Matrizen und die Linearen Gleichungssysteme heute aus der mathematischen Praxis kaum noch wegzudenken. Die Fähigkeiten in diesem Gebiet werden eher selten direkt geprüft (sie sind zu elementar), sie spielen aber in die meisten anderen Themengebiete hinein. Insbesondere ein kompetenter Umgang mit **LGS** ist absolut notwendig.

Welche Fertigkeiten werden im Einzelnen auf diesem Blatt trainiert?

- Lösungsverfahren für LGS mit zwei Variablen
- LGS ohne Lösung und LGS mit unendlicher Lösungsmenge
- Gaußverfahren für LGS

Aufgabe 1: LGS mit zwei Variablen

Lösen Sie folgende Gleichungssysteme mit einem Verfahren Ihrer Wahl:

a) $$\begin{aligned} 4x + 3y &= 14 \\ 2x - y &= 12 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 3x - 2y &= 5 \\ 6x - 4y &= 12 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 8 - 2x &= 4y \\ 1 + 3y &= x \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} 12x + 9y &= 15 \\ 4x + 3y &= 5 \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} \frac{x+3}{4} &= \frac{y-1}{5} \\ \frac{3x-7}{5} &= \frac{2y-4}{7} \end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned} \frac{x}{2} - \frac{3y}{5} &= 3 \\ \frac{x}{4} + y &= 8 \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Eindeutig lösbare LGS

Ermitteln Sie die (eindeutige) Lösung der folgenden linearen Gleichungssysteme mit dem Gaußverfahren oder anderen geeigneten Methoden!

a) $$\begin{aligned} 2 &= -x - 2y + 5z \\ 0 &= 2x + 3y - 4z \\ 1 &= 4x + y + 3z \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 2 &= x + z \\ 1 &= x - y \\ 5 &= 2x + y - z \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 1 &= y + z \\ -3 &= 2x - 2y \\ 0 &= 2x + y + z \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} 6 &= 4z \\ i + 1 &= 4x - y \\ -3i &= x + z \end{aligned}$$

Aufgabe 3: LGS ohne Lösung und mit unendlicher Lösungsmenge

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden LGS:

a) $$\begin{aligned} 0 &= 2x - y - z \\ -3 &= 4x + 2y \\ 1 &= 2x - y - z \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 1 &= 2x - y - z \\ -1 &= x + 2y \\ 0 &= 3x + y - z \end{aligned}$$

c) $6 = 10x - 2y - 4z$

Aufgabe 4: LGS mit Parametern

Bestimmen Sie die Lösungsmenge des LGS in Abhängigkeit der Parameter.

a) $$\begin{aligned} 0 &= 2x - 6y + az \\ -3b &= x + 2y \\ b + 1 &= 2x - y - z \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 0 &= x - by + z \\ 2d + 3 &= 6x - 2y \\ 5 &= 2x - 2by - z \end{aligned}$$

Lösungen: (Angaben ohne Gewähr, bei Unklarheit bitte nachfragen)

1.

a) $x = 5,\ y = -2$ **b)** $\mathcal{L} = \emptyset$ **c)** $x = 2{,}8,\ y = 0{,}6$ **d)** $\mathcal{L} = \mathbb{R}$

e) $x = 9,\ y = 16$ **f)** $x = 12,\ y = 5$

2.

a) $x = -1,\ y = 2,\ z = 1$ b) $x = 2,\ y = 1,\ z = 0$

c) $x = -\frac{1}{2},\ y = 1,\ z = 0$ d) $x = -\frac{3}{2} - 3i,\ y = -7 - 13i,\ z = \frac{3}{2}$

3.

a) $L = \emptyset$

b) Mit $y = t$ folgt: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$

c) Mit $x = t, z = s$ folgt: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

4.

a) $a \neq -2$ eindeutig lösbar, $a = -2, b = -\frac{1}{4}$ unendliche Lösungsmenge, $a = -2, b \neq -\frac{1}{4}$ unlösbar

b) $b \neq \frac{1}{3}$ eindeutig lösbar, $b = \frac{1}{3}, d = -\frac{7}{2}$ unendliche Lösungsmenge, $b = \frac{1}{3}, d \neq -\frac{7}{2}$ unlösbar

Zur **Vertiefung** empfehlen wir folgende **Übungsaufgaben aus dem Skript**:

H2.14, H2.15, H2.16, H2.17, Ü2.19, Ü2.20, Ü2.21, Ü2.25