Aufgabenblatt D2 : Vektorgeometrie

Die **Vektorrechnung** ist eins der Fundamente der modernen Ingenieursmathematik. Während die Anfänge der Theorie darauf zurückgingen, geometrische Probleme rein analytisch (ohne Zeichnen) zu lösen, sind die Vektoren und die darauf aufbauende Lineare Algebra mit ihren Matrizen und die Linearen Gleichungssysteme heute aus der mathematischen Praxis kaum noch wegzudenken. Für einen guten Einstieg in die Lineare Algebra empfiehlt es sich, die analytische Geometrie kennenzulernen bzw. zu wiederholen (es ist oft noch Schulwissen).

Die Fähigkeiten in diesem Gebiet werden bei den meisten Prüfungen mit etwa 10-15% Punktgewicht abgefragt, die Schwierigkeit liegt dabei ungefähr auf Abiturniveau. Ab der tiefergehenden Hochschulmathe der höheren Semester ist ein souveräner Umgang mit Vektoren absolut notwendig.

In diesem und dem nächsten Übungsblatt werden die Grundlagen der Vektorrechnung und der analytischen Geometrie wiederholt.

Welche Fertigkeiten werden im Einzelnen auf diesem Blatt trainiert?

- Vektoren, Betrag, Winkel, Skalarprodukte, Kreuzprodukte
- Flächeninhalte von Dreiecken und Parallelogrammen im $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^2$
- Beschreibung von Geraden und Ebenen in Parameter- und Koordinatenform

Aufgabe 1: Vektoren und Vektoroperationen

a) Für welches $a \in \mathbb{R}$ nimmt $\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ a \end{pmatrix}$ den Wert 10 an?

b) Welche der folgenden Vektoren stehen aufeinander orthogonal?

$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) Bestimmen Sie das Kreuzprodukt $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$.

d) Für welche $a \in \mathbb{R}$ nimmt $\begin{pmatrix} a \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ die Länge 4 an?

e) Bestimmen Sie den Vektor $v \in \mathbb{R}^3$, der senkrecht auf $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ steht, für den $v \cdot e_z \geq 0$ gilt und der die Länge 1 hat!

f) Welcher Winkel liegt im Dreieck $A(0,1,0), B(2,3,0), C(1,1,-1)$ im Punkt A an?

Aufgabe 2: Parallelogramme, Flächeninhalte

a) Bestimmen Sie den Punkt D im Parallelogramm $ABCD$ mit den folgenden Koordinaten:

$$A(1,4,0), B(2,5,0), C(1,1,5)$$

b) Bestimmen Sie den Punkt C im Parallelogramm $ABCD$ mit den folgenden Koordinaten:

$$A(1,1,2), B(0,2,1), D(1,6,1)$$

c) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den beiden Vektoren $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird!

d) Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Parallelogramme aus a) und b).

e) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks $A(0,1,0), B(2,3,0), C(1,1,-1)$.

Aufgabe 3: Geraden und Ebenen

a) Geben Sie eine Gerade g an, die durch die Punkte $A(1,4,2), B(0,-3,6)$ verläuft!

b) Geben Sie eine Ebene an, die durch die $A(1,4,2), B(0,-3,6), C(2,1,-1)$ verläuft. Geben Sie sowohl die Parameterform als auch die parameterfreie Darstellung an!

c) Überführen Sie die folgenden Ebenen in eine parameterfreie Form. Geben Sie außerdem deren Hesse'sche Normalform an:

$$E_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad E_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

d) Überführen Sie die folgenden Ebenen in die Parameterform:

E_1: $x + 3y - z = 0$ E_2: $2x - y + 4z = 5$

E_3: $y - 3z = 1$ E_4: $3x = 6$

Lösungen: (Angaben ohne Gewähr, bei Unklarheit bitte nachfragen)

1.

a) $a = \frac{7}{4}$ **b)** $v_1 \perp v_2, v_1 \perp v_4, v_2 \perp v_3, v_3 \perp v_4$ **c)** $(-75, 7, -4)^T$

d) $a = \pm\sqrt{3}$ **e)** $v = \frac{1}{\sqrt{115}}\begin{pmatrix}-9\\-3\\5\end{pmatrix}$ **f)** $\propto = 60°$

2. a) $D(0,0,5)$ **b)** $C(0,7,0)$ **c)** $A = \sqrt{5690} = 75{,}43$ **d)** $A = \sqrt{59}$ bzw. $A = \sqrt{42}$ **e)** $A = \sqrt{3}$

3. a) $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\-7\\4\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\4\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\-7\\4\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\-3\\-3\end{pmatrix}$, $E{:}\, 33x + y + 10z = 57$

c) $\vec{\boldsymbol{n}} = \begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix}$, $4x - y + 3z = 11$, $HNF{:}\ \frac{4}{\sqrt{26}}x - \frac{1}{\sqrt{26}}y + \frac{3}{\sqrt{26}}z = \frac{11}{\sqrt{26}}$

$\vec{\boldsymbol{n}} = \begin{pmatrix}-9\\-8\\5\end{pmatrix}$, $-9x - 8y + 5z = 14$, $HNF{:}\ \frac{-9}{\sqrt{160}}x - \frac{4}{\sqrt{10}}y + \frac{5}{\sqrt{160}}z = \frac{7}{\sqrt{40}}$

d) $z = x + 3y,\quad x = s,\quad y = t,\quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = s\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$

$y = 5 - 2x - 4z,\quad x = s,\quad z = t,\quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\-4\\1\end{pmatrix}$

$y = 1 + 3z,\quad x = s,\quad z = t,\quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$

$x = 2,\quad y = s,\quad z = t,\quad \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ (parallel zur xy-Ebene)