# Aufgabenblatt D4 : Einführung in die Integralrechnung

Mit der **Integralrechnung** erreichen wir eins der herausforderndsten Themen der Grundvorlesungen in der Hochschulmathe. Viele Studenten empfinden sie als deutlich anspruchsvoller als die Differentialrechnung. Das ist durchaus nicht von der Hand zu weisen. Man kann sagen: Ableitungen sind Handwerk, Integrale sind Kunst.

Denn das „Integrieren“ (das Suchen von Stammfunktionen zu gegebenen Funktionen) funktioniert nicht einfach nach Regeln wie das Ableiten, sondern eher nach Strategien, die funktionieren können, aber nicht funktionieren müssen. Es ist also viel Trial-And-Error dabei. In unserem Kurs lernen wir daher nicht nur die mathematischen Sätze kennen (z.B. Substitutionsregel), sondern überlegen, wie wir daraus Vorgehensstrategien machen können.

Dieses Blatt ist dabei vor allem zum Einstieg geeignet. Wir sehen uns primär die Anwendungen an, die Integrationsstrategien werden mehrheitlich im nächsten Blatt behandelt.

Unsere Ziele für dieses Übungsblatt:

- Stammfunktionen und Stammfunktionstests
- Grundintegrale, Stammfunktionen mit Formelsammlung
- Lineare Substitution
- Flächenberechnungen mit der Integralrechnung
- Rotationskörper

### Aufgabe 1: Stammfunktionen-Test

Gegeben sei die folgende reelle Funktion: $F(x) = 1 + 2x^{\frac{3}{2}}\ln(\sqrt{x})$

a) Zeigen Sie: $F(x)$ ist Stammfunktion von $f(x) = \sqrt{x}\left(1 + 3\ln\left(\sqrt{x}\right)\right)$

b) Berechnen Sie $\int_1^4 f(x)dx$

c) Geben Sie noch zwei weitere Stammfunktionen $F_1, F_2$ von $f(x)$ an.

d) Bestimmen Sie die Stammfunktion $F_3$ von $f(x)$ mit $F_3(4) = 42$.

### Aufgabe 2: Unbestimmte Integrale

Ermitteln Sie die unbestimmten Integrale:

$\int 2\mathrm{x}^4 + \frac{3}{x} - \frac{5}{x^3}\,dx$ $\quad \int \frac{2}{\sqrt[4]{x^3}}\,dx$ $\quad \int \frac{1}{1+\mathrm{x}^2} - 2e^x + \cos x\,dx$

$\int 3^{x+2} - 2^{x-3}\,dx$ $\quad \int e^{2x}\,dx$ $\quad \int \frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{3}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$

**Aufgabe 3: Bestimmte Integrale**

a) Bestimmen Sie den Wert der bestimmten Integrale:

$\int_e^{e^3} \frac{1}{3x} + \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}} dx$ $\int_{-1}^{1} \frac{2}{1+t^2} dt$ $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} dx$

$\int_0^2 \frac{4}{\sqrt{1+x^2}} dx$ $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \cos(x) - 2\sin(x)\, dx$

b) Welche Fläche wird von den Begrenzungskurven $y = x^2$ und $y = 4 - x^2$ eingeschlossen?

c) Bestimmen Sie die gesuchten Grenzen der Integrale!

$\int_a^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2, \quad a =$ $\int_0^b \frac{4}{1-x^2} dx = \ln 16\,, \quad b =$

**Aufgabe 4: Integrale mit der Integraltabelle**

Bestimmen Sie die Integrale mithilfe der Integraltabelle in der Formelsammlung (Innenteil):

$\int_{-\pi}^{2\pi} \cos(3x) \cdot \sin(2x)\, dx$ $\int t^2\sqrt{3-t^2}\, dt$

$\int_1^e \ln^4(x)\, dx$ $\int_2^3 \frac{1}{2x^2-10x+8} dx$

**Aufgabe 5: Anwendungen aus der Geometrie**

a) Die Kurve $y = x^2$ $(0 \le x \le 2)$ rotiert um die x- bzw. die y-Achse und schließt damit einen Rotationskörper ein. Bestimmen Sie die Volumina der jeweils entstehenden Körper!

b) Bestimmen Sie die Bogenlänge der Kurve $y = x^2$ $(1 \le x \le 2)$.

**Aufgabe 6: Substitutionsregel: Innere lineare Substitution**

Bestimmen Sie die Integrale mit der Strategie der inneren linearen Substitution:

$\int \mathrm{e}^{3\mathrm{x}}\, dx$ $\int \sqrt{2\mathrm{x}-3}\, dx$ $\int \frac{1}{2x-3}\, dx$ $\int \ln(2x)\, dx$

$\int \cos(3x)\, dx$ $\int (2\mathrm{x}+1)^{10}\, dx$ $\int \frac{1}{\mathrm{x+a}}\, dx$ $\int \frac{1}{1+4x^2}\, dx$

**Lösungen: (Angaben ohne Gewähr, bei Unklarheit bitte nachfragen)**

**1. a)** Einfach ableiten, dann erkennt man: $F' = f$

**b)** $\int_1^4 f(x)dx = [F(x)]_1^4 = F(4) - F(1) = (16\ln(2)+1) - (0+1) = 16\ln(2)$

**c)** $F_1(x) = 2 + 2x^{\frac{3}{2}}\ln(\sqrt{x}), F_2(x) = 3 + 2x^{\frac{3}{2}}\ln(\sqrt{x})$ (einfach anderes ***+c*** wählen!)

**d)** $F(x) = 2x^{\frac{3}{2}}\ln\left(\sqrt{x}\right) - 16\ln(2) + 42$

**2.** $\frac{2}{5}x^5 + 3ln|x| + \frac{5}{2x^2} + c\,,\ 8\sqrt[4]{x} + c,\ \arctan(x) - 2e^x + \sin(x) + c$

$\frac{9}{\ln(3)}3^x - \frac{1}{8\ln(2)}2^x + c\,, \frac{1}{2}e^{2x} + c\,, -\cot(x) - 3arsinh(x) + c$

**3. a)** $\frac{2}{3} + 9e - 9\sqrt[3]{e},\ \pi\,, -\ln(2)\,, 4\ln\left(2+\sqrt{5}\right), \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$

**b)** $A = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(4-x^2) - x^2\,dx = \frac{16}{3}\sqrt{2}$

**c)** $\int_a^4 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 4 - 2\sqrt{a} = 2, a = 1,$

$\int_0^b \frac{4}{1-x^2}dx = 2\ln|1-b| - 2\ln|1+b| = \ln 16 = 2\ln 4$ , $\ln\frac{|1-b|}{|1+b|} = \ln 4\,,\ b_1 = \frac{3}{5}\,,\ b_2 = -\frac{5}{3}$ *($b_2$ entfällt!)*

**4.** $\int_{-\pi}^{2\pi}\cos(3x)\cdot\sin(2x)\,dx = \left[-\frac{\cos(5x)}{10} - \frac{\cos(-x)}{-2}\right]_{-\pi}^{2\pi} = \left(-\frac{1}{10}+\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{10}-\frac{1}{2}\right) = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

$\int t^2\sqrt{3-t^2}\,dt = -\frac{t}{4}(3-t^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{8}\left(t\sqrt{3-t^2} + 3\arcsin\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\right) + c$

$$\int_1^e \ln^4(x)\,dx = [xln^4(x) - 4(xln^3(x) - 3xln^2(x) + 6x\ln(x) - 6x)]_1^e$$

$$= \left(e - 4(e - 3e + 6e - 6e)\right) - \left(0 - 4(0-6)\right) = 9e - 24$$

$\int_2^3 \frac{1}{2x^2-10x+8}dx = \left[\frac{1}{6}\ln\left|\frac{4x-10-\sqrt{6}}{4x-10+\sqrt{6}}\right|\right]_2^3 = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{2-\sqrt{6}}{2+\sqrt{6}}\right| - \frac{1}{6}\ln\left|\frac{-2-\sqrt{6}}{-2+\sqrt{6}}\right| = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{(2-\sqrt{6})(-2+\sqrt{6})}{(2+\sqrt{6})(-2-\sqrt{6})}\right| = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{5-2\sqrt{6}}{5+2\sqrt{6}}\right|$

**5. a) Um x-Achse:** $\frac{32}{5}\pi$

**Um y-Achse:** $8\pi$

**b)** $L = \int_{x=1}^{2}\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = \int_{x=1}^{2}\sqrt{1+4x^2}\,dx = 2\int_{x=1}^{2}\sqrt{\frac{1}{4}+x^2}\,dx$

$= \left[x + \frac{1}{4}\ln\left|x + \sqrt{1/4 + x^2}\right|\right]_1^2 = 1 + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{4+\sqrt{17}}{2+\sqrt{5}}\right)$

**6.** $\frac{1}{3}e^{3x}$ $\frac{1}{3}(2x-3)^{\frac{3}{2}}$ $\frac{1}{2}ln|2x-3|$ $\frac{1}{2}(2\text{x}\ln(2\text{x}) - 2\text{x}) = \text{x}\ln(2\text{x}) - \text{x}$

$\frac{1}{3}\sin(3x)$ $\frac{1}{22}(2x+1)^{11}$ $\ln|x+a|$ $\frac{1}{2}\arctan(2x)$

Zur **Vertiefung** empfehlen wir folgende **Übungsaufgaben aus dem Skript**:

H6.1, H6.2, H6.3, Ü6.1, Ü6.2, Ü6.3,