Blatt Nr.

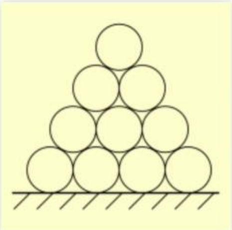
____

Übungsblatt: Folgen und Folgengrenzwerte

Folgengrenzwerte zu verstehen ist eine wichtige Voraussetzung für die Analyse von unendlichen Reihen und Potenzreihen. Gleichzeitig ist dies auch eine gute Vorbereitung für Funktionen, denn auch da ist das Wissen über Grenzwerte unabdingbar.

Ebenso ist es spannend Folgen und Folgengrenzwerte als eine Art Knobelaufgabe zu betrachten, sie schulen den mathematischen Blick und Lösungsideen.

Ein kleines Beispiel: Auf einem Lagerplatz sind Rohre (siehe Bild) gestapelt. In der untersten Reihe befinden sich 100 Rohre. Wie viele Rohre liegen insgesamt auf dem Lagerplatz?



Aufgabe 1: Zahlenfolgen-raten

Setzen sie die Zahlenfolgen fort **und** geben sie eine mögliche Folge explizit an.

a) $1,3,5,7,\ldots$ **b)** $2,4,8,16,\ldots$ **c)** $3,8,13,18,23,\ldots$ **d)** $5,-4,3,-2,1,\ldots.$

e) $2,1,\frac{1}{2},\frac{1}{4},\ldots$ **f)** $3,5,9,15,\ldots$

Aufgabe 2: Grenzwerte von Zahlenfolgen der Form

Geben Sie den Grenzwert folgender Zahlenfolgen an, falls möglich:

a) $a_n = n$ **b)** $a_n = (-2)^n$ **c)** $a_n = 2^{-n}$ **d)** $a_n = \frac{2n-3}{3n+7}$

e) $a_n = \frac{2n^2-3}{3n^2+7}$ **f)** $a_n = \frac{3\sqrt{n}+1}{2\sqrt{n}-2}$ **g)** $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ **h)** $a_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$

i) $a_n = \frac{n^2-3n+7}{3n^3-2n^2}$ **j)** $a_n = \frac{n^2-n+1}{2n-2}$ **k)** $a_n = \frac{2^n-5}{3^n+5n+1}$ **l)** $a_n = e^{-n}(2^n-5)$

Tipp: Für die geometrische Folge q^n gilt: $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$, falls: $|q| < 1$

Aufgabe 3: Grenzwerte der Form $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

Geben Sie den Grenzwert folgender Zahlenfolgen an, falls möglich:

a) $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ **b)** $a_n = \left(1+\frac{3}{n}\right)^n$ **c)** $a_n = \left(1+\frac{2}{3n}\right)^n$ **d)** $a_n = \left(\frac{4}{3n}+1\right)^n$

e) $a_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$ **f)** $a_n = \left(1+\frac{3}{n}\right)^{2n-1}$ **g)** $a_n = \left(1-\frac{3}{5n}\right)^{3n+5}$ **h)** $a_n = \left(\frac{n-2}{n+1}\right)^{2n}$

Aufgabe 4: Grenzwerte der Form „$\infty - \infty$“

Geben Sie den Grenzwert folgender Zahlenfolgen an, falls möglich:

a) $a_n = \frac{n^2-1}{n+1} - n$ **b)** $a_n = \frac{n^2+n-1}{n+5} - \frac{n^2+2n+2}{n+1}$ **c)** $a_n = \sqrt{n-1} - \sqrt{n+2}$

d) $a_n = \frac{2n+1}{3} - \frac{n^2+n-1}{n+1}$

Aufgabe 5: spezielle Tafelwerk-Grenzwerke (i.A. nicht bekannt)

Geben Sie den Grenzwert folgender Zahlenfolgen an, falls möglich:

a) $a_n = \frac{2}{\sqrt[n]{n!}}$ **a)** $a_n = \frac{2n-1}{\sqrt[n]{n!}}$ **c)** $a_n = \frac{\sqrt[n/2]{n!}}{n^2+1}$ **d)** $a_n = \sqrt[n]{2n^2-3n+1}$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^a} = 1\ (a \in \mathbb{R}) \quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!} = \infty \quad \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$$

Aufgabe 6: Grenzwerte-Mix

Geben Sie den Grenzwert folgender Zahlenfolgen an, falls möglich:

a) $a_n = \left(1+\frac{3}{n}\right)^{n+2}$ **b)** $a_n = \frac{2n+1}{3n-1} - \frac{n^2+n-1}{n^2+1}$ **c)** $a_n = 2^{-2n+1}(2^n+3^n)$

d) $a_n = \frac{3\sqrt{n}+1+2n}{2\sqrt{n}-2n-4}$ **e)** $a_n = \frac{5^n-5n}{2^n+n^2+1}$ **f)** $a_n = \frac{1-n^2}{3n^2+4n-2}$

g) $a_n = \left(\frac{n+2}{n}\right)^{n-1}$ **h)** $a_n = n - \frac{n^2+2n-3}{n+1}$

Aufgabe 7: Monotonie von Zahlenfolgen

Untersuchen sie folgende Zahlenfolgen auf Monotonie

fallend: $a_{n+1} < a_n$ oder steigend: $a_{n+1} > a_n$

a) $a_n = n$ **b)** $a_n = \frac{1}{n}$ **c)** $a_n = 2^{-n}$ **d)** $a_n = \frac{n-1}{n+1}$

e) $a_n = \frac{n+1}{n-1}$ **f)** $a_n = \frac{3n+1}{n^2-4}$ **g)** $a_n = \frac{2-3n}{n^3+1}$ **h)** $a_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$

Lösungen: (Angaben ohne Gewähr, bei Unklarheit bitte nachfragen)

Eingangsaufgabe: $s = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{100*101}{2} = 5050$

1.) **a)** 9,11,13 , $a_n = 2n - 1$ **b)** 32, 64, 128 $a_n = 2^n$ **c)** 28,32,38 $a_n = 5n - 2$

d) 0,1,-2 $a_n = (-1)^n(n-6)$ **e)** $\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$ $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$ **f)** 23, 33, 45

2.)

a) ∞	**b)** /	**c)** 0	**d)** 2/3	**e)** 2/3	**f)** 3/2
g) 0	**h)** ∞	**i)** 0	**j)** ∞	**k)** 0	**l)** 0

3.)

a) e	**b)** e^3	**c)** $e^{\frac{2}{3}}$	**d)** $e^{\frac{4}{3}}$	**e)** e^{-1}	**f)** e^6
g) $e^{-\frac{9}{5}}$	**h)** e^{-6}				

4.) **a)** $a_n = \frac{n^2-1}{n+1} - \frac{n^2+n}{n+1}$, $\lim_{n\to\infty} a_n = -1$

b) $a_n = \frac{(n+1)(n^2+n-1)}{(n+1)(n+5)} - \frac{(n+5)(n^2+2n+2)}{(n+1)(n+5)}$ $\lim_{n\to\infty} a_n = -5$

c) $a_n = \frac{(\sqrt{n-1}-\sqrt{n+2})(\sqrt{n-1}+\sqrt{n+2})}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n+2}}$ $\lim_{n\to\infty} a_n = -5$

d) $-\infty$

5.) **a)** 0 **b)** 2e **c)** e^{-2} **d)** 1

6)

a) e^3	**b)** $-\frac{1}{3}$	**c)** 0	**d)** -1
e) ∞	**f)** $-\frac{1}{3}$	**g)** e^2	**h)** -1

7.) **a)** monoton steigend $n < n+1$ **b)** monoton fallend **c)** monoton fallend

d) monoton steigend **e)** monoton fallend $n > 1$ **f)** monoton fallend $n \geq 3$

g) monoton steigend $n > 1$ **h)** monoton fallend