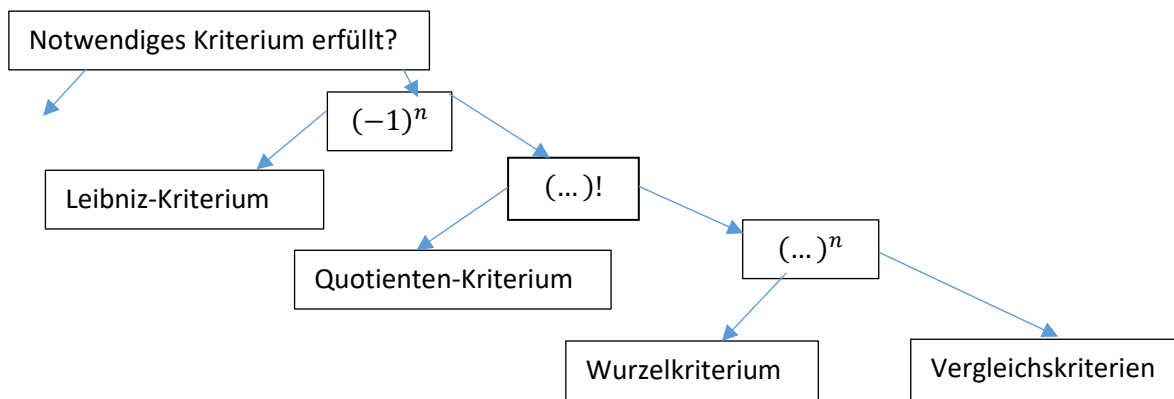


## Übungsblatt: Konvergenz unendlicher Reihen

Für die Untersuchung von der Konvergenz unendlicher Reihen ist es notwendig, dass die Folge gegen Null konvergiert. Ist dies der Fall, heißt das leider noch nicht automatisch, dass auch die unendliche Reihe konvergiert. Wann man nun welches Konvergenzkriterium verwendet, soll folgender Entscheidungsbaum etwas Aufklärung verschaffen:



### Aufgabe 1: Summe endlicher Reihen

Berechnen Sie die Summe:

a)  $\sum_{n=0}^4 n$       b)  $\sum_{n=1}^{10} 2n - 3$       c)  $\sum_{i=3}^7 i - 1$       d)  $\sum_{n=0}^4 a$

### Aufgabe 2: Notwendiges Konvergenzkriterium

Entscheiden Sie, ob das notwendige Konvergenzkriterium erfüllt ist.

a)  $\sum_{n=0}^{\infty} n$       b)  $\sum_{n=1}^{\infty} -2n - 3$       c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-3}{3n-5}$       d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-3}{2n^2+5}$   
 e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n$       f)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$

### Aufgabe 3: Leibniz Kriterium

Entscheiden Sie mit dem Leibniz-Kriterium, ob folgende Reihen konvergent oder divergent sind:

a)  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n - 3)$       b)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-3}{2n^2+5}$   
 c)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^3-3}{2n^2+5}$       d)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2}{3}\right)^n$   
 e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-3}{2}\right)^n$       f)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-3(-1)^n}{2n^2+5}$

#### Aufgabe 4: Quotienten-Kriterium

Entscheiden Sie mit Hilfe des Quotienten-Kriteriums auf Konvergenz folgender unendlicher Reihen  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  :

$$\begin{array}{llll} \text{a) } a_n = \frac{1}{n^2} & \text{b) } a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n & \text{c) } a_n = \frac{2}{n!} & \text{d) } a_n = \frac{n!}{n^n} \\ \text{e) } a_n = \frac{n^2-7}{2^n} & \text{f) } a_n = \frac{2n!}{e^{n-2}} & \text{g) } a_n = \frac{(-4)^n}{3^n} & \text{h) } a_n = \frac{2^n}{(n!)^2} \end{array}$$

#### Aufgabe 5: Wurzel-Kriterium

Entscheiden Sie mit Hilfe des Wurzel-Kriteriums auf Konvergenz folgender unendlicher Reihen  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  :

$$\begin{array}{llll} \text{a) } a_n = \frac{1}{n^2} & \text{b) } a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n & \text{c) } a_n = \frac{2}{n!} & \text{d) } a_n = \left(\frac{2n-7}{3n+1}\right)^n \\ \text{e) } a_n = \frac{2^n}{n^n} & \text{f) } a_n = \frac{2^n}{3n^2+1} & \text{g) } a_n = \frac{2\sqrt{n}-5}{e^n} & \text{h) } a_n = \left(\frac{10n^2-2n+1}{5n^2+1}\right)^n \end{array}$$

#### Aufgabe 6: Vergleichskriterien – Entscheidung über Vergleichsreihe

Entscheiden Sie sich für das richtige Vergleichskriterium bei den vorliegenden Reihen  $\sum_{n=10}^{\infty} a_n$  (Minoranten-, Majoranten-Krit.) , mit Hilfe einer geeigneten Vergleichsreihe ( $\sum_{n=10}^{\infty} b_n$ ):

$$\text{a) } a_n = \frac{2n^2-3n-1}{n^4+2n+1} \quad \text{b) } a_n = \frac{2\sqrt{n}+2n}{5n^2-7n-2} \quad \text{c) } a_n = \frac{2n+n \cdot (-1)^n}{n^2-2} \quad \text{d) } a_n = \frac{n^2+2n}{5n^2+1}$$

#### Aufgabe 7: Vergleichskriterien

Entscheiden Sie mit Hilfe des geeigneten Vergleichskriteriums auf Konvergenz folgender unendlicher Reihen  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  :

$$\begin{array}{llll} \text{a) } a_n = \frac{2}{n^2} & \text{b) } a_n = \frac{1}{5n} & \text{c) } a_n = \frac{3}{\sqrt{n}} & \text{d) } a_n = \frac{1}{5n+1} \\ \text{e) } a_n = \frac{n^2-1}{n^4+2n^2+3} & \text{f) } a_n = \frac{2+\sin(n)}{n} & \text{g) } a_n = \frac{5}{2n+n(-1)^n} & \text{h) } a_n = \frac{2\sqrt{n}-1}{n^2+1} \end{array}$$

#### Aufgabe 8: Konvergenzkriterien-Mix

Untersuchen Sie die Reihen  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  auf Konvergenz.

$$\begin{array}{llll} \text{a) } a_n = \frac{n+1}{n^2-2n-3} & \text{b) } a_n = \frac{2^n}{n!} & \text{c) } a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} & \text{d) } a_n = \left(\frac{4n^2+2n-1}{5n^2-4n+1}\right)^n \\ \text{e) } a_n = \frac{2^{n-1}}{(n+1)^n} & \text{f) } a_n = \frac{3+(-1)^n}{n^2+1} & \text{g) } a_n = \frac{(2n)!}{n^n} & \text{h) } a_n = \frac{2n^2-3n+1}{2^n} \end{array}$$

**Lösungen: (Angaben ohne Gewähr, bei Unklarheit bitte nachfragen)**

- 1.) a) 10      b) 80      c) 20      d) 5a
- 2.) a) nein      b) nein      c) nein      d) ja      e) nein      f) ja
- 3.) a) divergent      b) konvergent      c) divergent      d) konvergent      e) divergent      f) kein Leibniz
- 4.) a) nicht entscheidbar mit Q.-Krit.      b) konvergent      c) konvergent      d) konvergent  
e) konvergent      f) divergent      g) divergent      h) konvergent
- 5.) a) nicht entscheidbar mit W.-Krit.      b) konvergent      c) konvergent      d) konvergent  
e) konvergent      f) divergent      g) konvergent      h) divergent
- 6.) a)  $b_n = 2 \frac{1}{n^2}$  Majoranten      b)  $b_n = \frac{2}{5n}$  Minoranten  
c)  $b_n = \frac{1}{n}$  Minoranten      d) notwendiges Kriterium nicht erfüllt -divergent
- 7.) a) konvergent      b) divergent      c) divergent      d) divergent      e) konvergent      f) divergent  
g) divergent      h) konvergent
- 8.) a) divergent Minoranten      b) konvergent Quotienten      c) konvergent Leibniz  
d) konvergent Wurzel      e) konvergent Wurzel      f) konvergent Majoranten  
g) konvergent Quotienten      h) konvergent Wurzel