Probeklausur

MW Mathe 3, TU Dresden,
nach Stil von Prof. Fischer

Auf unserem Youtube-Kanal findest du zahlreiche Videos rund um die Mathe 1-3 im Ingenieursstudium

Mit dieser Probeklausur fassen wir die typischen Themen der Mathe 3 bei Prof. Fischer (TU Dresden) zusammen. Die Aufgaben sind dabei von uns entwickelt, orientieren sich aber in Stil und Inhalt an den Originalen von Prof. Fischer.

Zu den Themen gehören:

- Reihen, Potenzreihen, Fourierreihen
- Integralrechnung im Mehrdimensionalen
- Partielle Differentialgleichungen
- Stochastik und Statistik

Bei anderen Professoren, z.B. Prof. Matthies, kann es hier zu Abweichungen kommen, da Prof. Matthies beispielsweise die Reihen schon vorher im 1./2. Semester behandelt und dafür in Mathe 3 etwas tiefer in Themen wie Parameterintegrale, Vektoranalysis und Differentialgeometrie einsteigt. Eine Deckung von 75-80% ist trotzdem zu erwarten.

Punktverteilung in dieser Probeklausur:

Aufgabe Nr.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**Summe**
Punkte Soll	7	8	5	5	10	9	7	51
Punkte Ist								

Unsere Klausuranalyse findest du auf unserem Youtube-Kanal, am einfachsten erreichbar über den rechts stehenden QR-Code.

Viel Erfolg bei deiner Vorbereitung auf die Mathe-Prüfung
Matthias und das Team von LernKompass

info@lern-kompass.de

www.lern-kompass.de

Strehlener Str. 14
01069 Dresden

0351-45199340

Aufgabe 1:

Gegeben seien die Kurven C_1 und C_2, sowie die Punkte $P_1(1,2,-1)$, $P_2(0,2,2)$ und $P_3(1,2,1)$. Die Kurve C_1 sei der Streckenzug von P_1 über P_2 nach P_3, die Kurve C_2 sei der Viertelkreisbogen von P_1 nach P_3 um den Punkt $(0,2,0)$ in der Ebene $E: y = 2$

a) **[2]** Skizzieren Sie die Kurven C_1 und C_2 in der Ebene E und geben Sie eine Parametrisierung beider Kurven an.
b) **[2]** Entlang der Kurve C_1 verläuft ein Draht mit Massendichte $\delta(x, y, z) = x + yz$. Berechnen Sie die Gesamtmasse des Drahts mit einem geeigneten Kurvenintegral.
c) **[3]** Berechnen Sie das Kurvenintegral

$$\int_{C_2} \boldsymbol{f}\; ds \quad \text{für} \quad \boldsymbol{f}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y + 2z \\ 2y + 1 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Eine Überprüfung des Integrals auf Wegunabhängigkeit könnte zweckmäßig sein.

Aufgabe 2:

Gegeben seien die (gewöhnlichen) Reihen

$$q_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 - 1}{k!} \qquad q_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k}{k2^k + 1}$$

sowie die Potenzreihe

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k + 2}{k^2 3^k} (6x + 3)^k$$

a) **[2]** Untersuchen Sie die Reihen q_1 und q_2 auf Konvergenz.

b) **[3]** Die Potenzreihe $s(x)$ konvergiert auf dem (maximalen) offenem Intervall (α, β). Ermitteln Sie die Werte α, β und untersuchen Sie die Konvergenz konkret für $s(\alpha), s(\beta)$.

c) **[3]** Über ein periodisches Signal $f(x)$ sei bekannt:

$$f(x) = 3x \text{ für } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), f(x) = f(-x), \qquad f(x) = f(x + \pi)$$

Ermitteln Sie Koeffizienten a_k, b_k, sodass gilt:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2kx) + b_k \sin(2kx)$$

Aufgabe 3:

a) Sei $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $C, D \in \Sigma$ Ereignisse mit $\mathbb{P}[C \cup D] = 0.8$, $\mathbb{P}[C \cap \overline{D}] = \mathbb{P}[C \cap D] = 0.3$.

a1) **[1]** Berechnen Sie $\mathbb{P}[C]$ und $\mathbb{P}[D]$
a2) **[1]** Sind C und D (stochastisch) unabhängige Ereignisse?

b) Betrachtet werde die diskrete Zufallsvariable X mit $\mathbb{P}[X = k] = 2^{-k}$ $(k = 1,2,3 \ldots)$

b1) **[1]** Begründen Sie, dass damit tatsächlich eine diskrete Zufallsgröße definiert ist.
b2) **[2]** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}[X < 4]$ und $\mathbb{P}[X \leq 2 \mid X < 5]$

Aufgabe 4:

a) **[2]** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$xu_x - (y-1)u_y = x^2(y-1)^3$ mittels der Transformation $\xi(x,y) = x(y-1), \eta(x,y) = y$

b) **[3]** Bestimmen Sie mittels Charakteristikenmethode die allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung $-xu_x + yu_y = xu$ und berechnen Sie die spezielle Lösung unter der Anfangsbedingung $u(x,1) = x$

Aufgabe 5:

Der Körper K wird im ersten Oktanten des $\mathbb{R}^3$ begrenzt von den Flächen

$$x + y = 2 \quad , \qquad x^2 + y^2 = 4\,, z = 0 \;\; , \;\; z = x$$

a) **[1]** Skizzieren Sie den Grundriss des Körpers K in der Ebene $\mathcal{E}: z = 0$

b) **[3]** Berechnen Sie das Volumen von K.

c) **[3]** Berechnen Sie den Fluss $\iint_{\partial K} \vec{v}\, dA$ durch den Rand ∂K des Körpers K bezüglich des Vektorfelds $\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x^2 + 3x \\ yz \\ 2 - \frac{1}{2}z^2 - zx \end{pmatrix}$ mit nach außen gerichtetem Normalenvektor $\vec{n}$.

d) **[3]** Berechnen Sie den Fluss $\iint_A \vec{v}\, dA$, wobei A die in der Zylinderfläche $x^2 + y^2 = 4$ liegende Seitenfläche von K darstellt mit $dA \cdot e_x > 0$.

Aufgabe 6:

a) Gegeben sei die folgende partielle Differentialgleichung 2.Ordnung:

$$u_{tt} - x^2 u_{xx} + 2u_t = u_x \quad (x > 0)$$

a1) **[1]** Ermitteln Sie den Typ (elliptisch, hyperbolisch, parabolisch) dieser partiellen Differentialgleichung.
a2) **[2]** Mittels Produktansatz $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ kann die genannte partielle Differentialgleichung in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen in $X(x)$ und $T(t)$ separiert werden. Geben Sie diese an.

b) Die partielle Differentialgleichung $u_t = t^2 u_{xx} \;\; (t > 0, \;\; x \in (0,1))$

kann mittels Produktansatz $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen zerlegt werden, bei der die Differentialgleichung in $X(x)$ bekannt sei mit $X''(x) + \lambda X(x) = 0$ (Eigenwertproblem)

b1) **[3]** Ermitteln Sie die Lösung des Eigenwertproblems für $\lambda > 0$ und die Randbedingung $u_x(0,t) = u(1,t) = 0$. Geben Sie dazu alle Eigenwerte und Eigenfunktionen an!
b2) **[2]** Ermitteln Sie die allgemeine Lösung für $u(x,t)$.
b3) **[1]** Ermitteln Sie die spezielle Lösung der partiellen Differentialgleichung für die Anfangsbedingung $u(x,0) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

Aufgabe 7:

a) Gegeben sei die Funktion

$$f_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \leq 2 \\ ax^{-2} & \text{für} \quad x > 2 \end{cases}$$

a1) **[2]** Für welche $a > 0$ ist $f_a(x)$ Dichtefunktion einer Zufallsvariablen X ? Berechnen Sie die zugehörige Verteilungsfunktion $F_a(x)$.

a2) **[2]** Berechnen Sie für dieses $a \in \mathbb{R}$ die Wahrscheinlichkeiten

$P[X > 3]$ und $P[X < 4 \mid X > 3]$.

b) Die Lebensdauer L einer industriell genutzten Beleuchtungsanlage wird in einem (vereinfachten) Modell als normalverteilt mit Erwartungswert $\mu_L = 400h$ und Varianz $\sigma_L^2 = 25h^2$ angenommen.

b1) **[1]** Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die konkrete Lebensdauer einer Anlage dieser Art über 410h liegt?

b2) **[2]** Ermitteln Sie ein Intervall $[\mu_L - r, \mu_L + r]$, sodass in 99% der Fälle die Lebensdauer in diesem Intervall liegt.