Ablauf

Donnerstag, 18. Februar 2021 09:30

1. Besprechung offener Fragen
2. Übrige Zeit: Vorrechnen von Teilen der LernKompass-Probeklausur

Den Livestream zu den Fragen findest du hier:

[Community-Livestream - Offene Fragestunde für MW Mathe 3]

Thema 1: Taylorentwicklung

Donnerstag, 18. Februar 2021 09:28

Beispiel: (Taylorentwicklung)

Gegeben sei die Funktion $f(x) = 1/\sqrt{x}$.

a) Bestimme das Taylorpolynom dritten Grades an der Entwicklungsstelle $x_0 = 4$.
b) Gib das Restglied R_3 in Lagrange-Darstellung an.
c) Bestimme eine Abschätzung des Fehlers $|f(x) - T_3(x)|$ im Intervall $x \in \left[\frac{9}{4}; 9\right]$

TW S. 83

a)

k	$f^{(k)}$	$f^{(k)}(x_0)$, $x_0 = 4$
0	$1/\sqrt{x} = x^{-1/2}$	$4^{-1/2} = 1/4^{1/2} = 1/2$
1	$-1/2\ x^{-3/2}$	$-1/2 \cdot 4^{-3/2} = -1/2 \cdot 1/8 = -1/16 = -2^{-4}$
2	$3/4\ x^{-5/2}$	$3/4 \cdot 4^{-5/2} = 3/4 \cdot 1/32 = 3 \cdot 2^{-7}$
3	$-15/8\ x^{-7/2}$	$-15/8 \cdot 4^{-7/2} = -15/8 \cdot 2^{-7} = -15 \cdot 2^{-10}$
4	$105/16\ x^{-9/2}$	

$4^{-3/2} = \frac{1}{4^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{4}^3} = 1/8$

$4^{-5/2} = \frac{1}{\sqrt{4}^5} = 1/32$

$T_3 = f(4) + \frac{f'(4)}{1!}(x-4)^1 + \frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2 + \frac{f'''(4)}{3!}(x-4)^3$

$= 1/2 + (-1/16)\cdot(x-4)^1 + 3\cdot 2^{-8}\cdot(x-4)^2 + \frac{(-15)2^{-10}}{3!}\cdot(x-4)^3$

$-5\cdot 2^{-10}$

$T_3 = 1/2 - 2^{-4}(x-4)^1 + 3\cdot 2^{-8}(x-4)^2 + (-5)\cdot 2^{-10}\cdot(x-4)^3$

b) $R_3 = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)^4$

$= \frac{105/16 \cdot \xi^{-9/2}}{4!}(x-4)^4$

$4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4$

$= \frac{35}{16\cdot 2\cdot 4}\xi^{-9/2}(x-4)^4$

$= 35\cdot 2^{-7}\cdot \xi^{-9/2}\cdot(x-4)^4$, ξ zwischen x, x_0

c) $f = T_n + R_n$

$|f - T_3| = |R_3| = \left|35\cdot 2^{-7}\ \xi^{-9/2}\cdot(x-4)^4\right|$

$|a\cdot b| = |a|\cdot|b|$

$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

$|a^k| = |a|^k$

$= 35\cdot 2^{-7}\cdot\left|\frac{1}{\xi^{9/2}}\right|\cdot|x-4|^4$

$|a^k| = |a|^k$

$|a+b| \le |a|+|b|$

$x, \xi \in \left[\frac{3}{4}; 3\right]$

$\le \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^{3/2}} \le \frac{|3-4|^4}{5^4}$

max. groß, wenn ξ min. $= \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)^3} = \frac{2^3}{3^3}$

$\le 35 \cdot 2^{-7} \cdot \frac{2^3}{3^3} \cdot 5^4$

$\le 35 \cdot 2^2 \cdot 3^{-3} \cdot 5^4 = \frac{140 \cdot 625}{19683} \approx 4{,}4$

Beispiel: (Taylorentwicklung)

Gegeben sei die Funktion $f(x) = -2x^4 - 4x^3 - 5x^2 - 5x + 7.$

a) Bestimme das Taylorpolynom dritten Grades an der Entwicklungsstelle $x_0 = 1$.

b) Bestimme eine Abschätzung des Fehlers $|f(x) - T_3(x)|$ im Intervall $x \in \left[\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right]$

a)

k	$f^{(k)}$	$f^{(k)}(x_0), x_0 = 1$
0	$-2x^4-4x^3-5x^2-5x+7$	-9
1	$-8x^3-12x^2-10x-5$	-35
2	$-24x^2-24x-10$	-58
3	$-48x-24$	-72
4	-48	

$T_3 = -9 + \frac{-35}{1!}(x-1)^1 + \frac{-58}{2!}(x-1)^2 + \frac{-72}{3!}(x-1)^3$

$= -9 - 35(x-1) - 29(x-1)^2 - 12(x-1)^3$

b) $|f - T_3(x)| = |R_3| = \left|\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-1)^4\right|$

$= \left|\frac{-48}{4!}\right| \cdot |x-1|^4$

$$= \underbrace{\left|\frac{-48}{4!}\right|}_{=2} \cdot \underbrace{|x-1|^4}_{\leq \left(\frac{1}{4}\right)^4}$$

$$\leq 2 \cdot 2^{-8} = 2^{-7} = \frac{1}{128} \;//$$

Thema 2: Komplexe Zahlen

Donnerstag, 18. Februar 2021 10:20

Probeklausur Aufgabe 1: Komplexe Zahlen

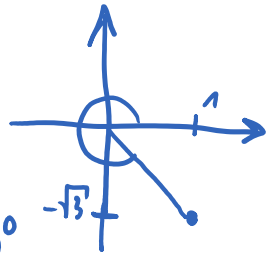
a) Bestimmen Sie Betrag und Argument von $z = 1 - \sqrt{3}i$
b) Bestimmen Sie alle Lösungen von $w^3 + 8i = 0$. Die exponentielle Form ist dabei ausreichend.

$a = 1$
$b = -\sqrt{3}$

a) $r = |z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

$\tan\varphi = \frac{b}{a} = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$

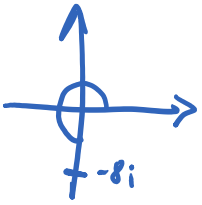
$\Rightarrow \varphi = 120°$ entfällt oder $\varphi = 300°$ richtig



$|z| = 2$
$\arg(z) = \frac{5}{3}\pi$

b) $w^3 = -8i$

$w^3 = 8e^{i270°}$



$w_1 = \left(8e^{270°i}\right)^{1/3} = \sqrt[3]{8} \cdot e^{270°i \cdot 1/3} = 2e^{90°i}$

drehen $+\frac{360°}{3} = 120°$

$w_1 = 2e^{i\,210°}$

$w_3 = 2e^{i\,330°}$

c) Ermittle ein reelles Polynom möglichst niedrigen Grades, das mindestens die Nullstellen $z_1 = 2 - i$, $z_2 = 4$ besitzt.

Vorfaktoren reell

$\Rightarrow$ wenn z_0 Nst, dann auch $\overline{z_0}$

Hier: $z_{1,2} = 2 \pm i$, $z_3 = 4$

$p(z) = \underbrace{(z-(2+i))(z-(2-i))}\cdot(z-4) = z^3 - 4z^2 + 5z - 4z^2 + 16z - 20$

$= z^3 - 8z^2 + 21z - 20$

$$= z^3 - 8z^2 + 21z - 20$$

$$((z-2)-i)((z-2)+i)$$

$$= (z-2)^2 - i^2$$

$$= z^2 - 4z + 4 + 1$$

$$= z^2 - 4z + 5$$

Beispiel: (Konvergenzkriterien)

Bestimme, welche der folgenden Reihen konvergent sind.

$\sum \left(\frac{-8k+1}{-3k+2}\right)^k$ Wk

$q = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{-8k+1}{-3k+2}\right|^k} = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{-8k+1}{-3k+2}\right| = \left|\frac{8}{3}\right| = \frac{8}{3} > 1$

$\Rightarrow$ div. nach Wk $\quad |a^k| = |a|^k$

$= \frac{k}{k} \cdot \frac{-8+\frac{1}{k}}{-3+\frac{2}{k}} \to \frac{-8}{-3} = \frac{8}{3}$

$\sum \frac{5^k}{\sqrt{2k+1}\cdot 4^k}$ Wk

$q = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{5^k}{\sqrt{2k+1}\cdot 4^k}\right|} = \lim_{k\to\infty} \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt[k]{\sqrt{2k+1}}} = \frac{5}{4}\cdot\frac{1}{1} = \frac{5}{4} > 1$

$\Rightarrow$ div. nach Wk

$\sqrt[k]{\sqrt{k}\cdot\sqrt{2+\frac{1}{k}}} = \left(k^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{k}} \cdot \sqrt[k]{2+\frac{1}{k}} = \left(k^{\frac{1}{k}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[k]{2+\frac{1}{k}} \to 1$

$\sqrt[k]{k} \to 1$, $\sqrt[k]{2+\frac{1}{k}} \to \sqrt{2}$, $\to 1$

$\sum \frac{2k^2+1}{k-2}$ Nk

$a_k = \frac{2k^2+1}{k-2} = \frac{k}{k}\cdot\frac{2k+\frac{1}{k}}{1-\frac{2}{k}} \to \infty$

$\Rightarrow a_k \not\to 0$

$\Rightarrow$ div. nach Nk

$\sum \underbrace{(-1)^k \frac{3k^2+1}{(k+5)^2}}_{\not\to 0}$ alternierende Reihe $a_k = \frac{3k^2+1}{k^2+10k+25} \to 3$

$a_k \not\to 0$, LK nicht anwendbar

$\not\to 0 \Rightarrow$ div. nach Nk

$\sum (k+1)!\frac{2}{(k+4)^k}$ Wk

$q = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt[k]{(k+1)!}}{\sqrt[k]{k!}\cdot\sqrt[k]{k+1}}\cdot\frac{\sqrt[k]{2}}{k+4}$

F3: $\sqrt[k]{k!} \to \infty$, $k+4 \to \infty$, $\frac{\sqrt[k]{k!}}{k} \to \frac{1}{e}$

$= \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt[k]{k!}}{k+4}\cdot\frac{\sqrt[k]{2}}{\sqrt[k]{k+1}} = \frac{1}{e} < 1$ ($\sqrt[k]{2} \to 1$, $\sqrt[k]{k+1} \to 1$)

$\frac{\sqrt[k]{k!}}{k} \to \frac{1}{e}$, $\frac{1}{1+\frac{4}{k}} \to 1$

Bem.: $\sqrt[k]{k+1} = \sqrt[k]{k}\cdot\sqrt[k]{1+\frac{1}{k}} \to 1$ ($\sqrt[k]{k} \to 1$, $\sqrt[k]{1+\frac{1}{k}} \to 1$, $\to 1$)

$\Rightarrow$ Reihe konv. nach Wk

Thema 4: Polynome und gebrochenrationale Funktionen

Donnerstag, 18. Februar 2021 11:12

a) Führen Sie die Polynomdivision durch und überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch Multiplikation!

$(x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 7x + 4) : (x + 4) =$ $x^3 + 0x^2 - 2x + 1$ (linear)

Nur Ergebnis: geht auch mit HORNER, da Nenner Form $x - x_0$ hat

	1	4	-2	-7	4
$x_0 = -4$		-4	0	8	-4
	1	0	-2	1	0

Polynomdiv.: $x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 7x + 4 : (x+4) = x^3 - 2x + 1$

$-(x^4 + 4x^3)$

$0 - 2x^2 - 7x + 4$

$-(-2x^2 - 8x)$

$x + 4$

Aufgabe 3:

Gegeben sei die Funktion $f: D_f \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 21x + 45}{2x^2 - 6x}$

a) **[1]** Ermitteln Sie die Asymptote von f.

b) **[2]** Bestimmen Sie alle Nullstellen des Zählerpolynoms von f.

c) **[2]** Bestimmen Sie alle Polstellen und hebbaren Definitionslücken von f

a) $x^3 - x^2 - 21x + 45 : (2x^2 - 6x) = \underbrace{\frac{1}{2}x + 1}_{a(x) = \frac{1}{2}x + 1} + \underbrace{\frac{-15x + 45}{2x^2 - 6x}}_{\text{echt gebr.-rat.}}$

$-(x^3 - 3x^2)$

$2x^2 - 21x + 45$

$-(2x^2 - 6x)$

$-15x + 45$

Asymptote

Rest $\to 0$

b) $p(x) = x^3 - x^2 - 21x + 45$

Raten: $1, -1, 3, -3$ $\quad 27 - 9 - 63 + 45$

$\times \quad \times \quad \checkmark$

	1	-1	-21	45
$x=3$		3	6	-45
	1	2	-15	0
$x=3$		3	15	
	1	5	0	

$p(x) = (x-3)(x^2+2x-15)$

$= (x-3)(x-3)(x+5)$

$x_1 = 3$ 2-fach

$x_2 = -5$ 1-fach

c) $f(x) = \frac{(x-3)^2(x+5)}{2x \cdot (x-3)}$

Lücken: 3 (hebbare Polstellen)

Nsd: -5

Polsd.: 0

Thema 5: Reelle Funktionen

Donnerstag, 18. Februar 2021 11:28

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Funktion $f: D \to \mathbb{R},\ f(x) = e^{\sqrt{4-x^2}}$, wobei D den natürlichen (d.h. größtmöglichen) Definitionsbereich von f bezeichne.

a) **[1]** Ermitteln Sie D.

b) **[2]** Bestimmen Sie einen größtmöglichen Definitionsbereich $D^* \subseteq D$, für den eine Umkehrfunktion für $f: D^* \to \mathbb{R}$ existiert. Geben Sie f^{-1} an.

a) $\sqrt{\cdot}$: $4 - x^2 \geq 0$

$4 \geq x^2 \quad | \sqrt{\cdot}$ $\boxed{\sqrt{a^2} = |a|}$

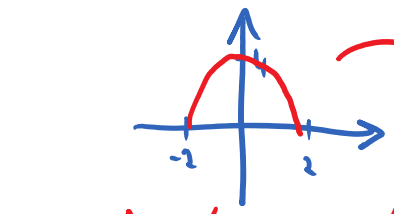
$x^2 \leq 4$

$|x| \leq 2$

$D = [-2;2]$

$-2 \leq x \leq 2$

b) f auf $[-2;2]$ nicht injektiv, da z.B. $4-x^2$ auf $[-2;2]$ nicht injektiv:

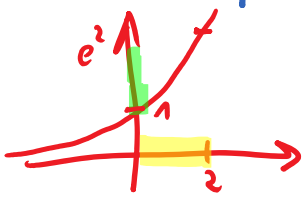


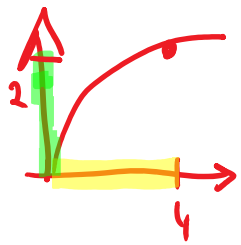
→ wähle $D^* = [0;2]$, hier f injektiv

W_f: $4-x^2$ hat WB $[0;4]$ auf D^*

$\sqrt{4-x^2}$ hat WB $[0;2]$

$e^{\sqrt{4-x^2}}$ hat WB $[1;e^2]$





$W_f = [1;e^2]$

$f^{-1}: W_f \to D^*$

$f^{-1}: [1;e^2] \to [0;4],\ f^{-1}(y) = +\sqrt{4+(\ln y)^2}$

$y = f(x) = e^{\sqrt{x^2-4}}$

wahlw.:

$f^{-1}(\cdot) = +\sqrt{4+(\ln(\cdot))^2}$

$y = f(x) = e^{\sqrt{x^2-4}}$

$\ln y = \sqrt{x^2-4}$

$(\ln y)^2 = x^2 - 4$

$x^2 = 4 + (\ln y)^2$

$x = \pm\sqrt{4+(\ln y)^2}$

$f^{-1}(\cdot) = +\sqrt{4+(\ln(\cdot))^2}$

$f^{-1}(x) = +\sqrt{4+(\ln x)^2}$

$f^{-1}(\odot) = +\sqrt{4+(\ln \odot)^2}$