Probeklausur: Mathematik 1 für Maschinenwesen

Aufgabe Nr.	1	2	3	4	5	6	Summe
Punkte Soll	5	4	4	5	7	6	31
Punkte Ist							

Erlaubte Hilfsmittel:

- Schreibgerät
- Getränk
- Formelsammlung
- 4 Blätter mit eigenen Notizen

Regeln der Klausur:

- Mobiltelefon bitte auf lautlos stellen
- Rucksack außer Reichweite
- Dauer: 90 min

Aufgabe 1:

Gegeben seien die beiden Zahlen $z_1 := 1 - \sqrt{3}i$ und $z_2 := 2 + i$

a) **[1]** Bestimmen Sie den Betrag und das Argument von z_1.

b) **[2]** Ermitteln Sie alle Lösungen der Gleichung $w^3 + 8i = 0$.
Hinweis: Es genügt, die Lösungen in exponentieller Form anzugeben.

c) **[2]** Ermitteln Sie ein Polynom $p(z) = az^3 + bz^2 + cz + d$ mit reellen Koeffizienten $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, das mindestens die Nullstellen $z_3 := 2 - i$ und $z_4 := 3$ besitzt.

Aufgabe 2:

Gegeben sei die Funktion $f: D \to \mathbb{R},\ f(x) = e^{\sqrt{4-x^2}}$, wobei D den natürlichen (d.h. größtmöglichen) Definitionsbereich von f bezeichne.

a) **[1]** Ermitteln Sie D.

b) **[2]** Bestimmen Sie einen größtmöglichen Definitionsbereich $D^* \subseteq D$, für den eine Umkehrfunktion für $f: D^* \to \mathbb{R}$ existiert. Geben Sie f^{-1} an.

c) **[1]** Zeigen Sie, dass f eine symmetrische Funktion ist (ist f gerade oder ungerade?).

Aufgabe 3:

Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 \sin(x + \frac{\pi}{2})$

a) **[2]** Ermitteln Sie das quadratische Taylorpolynom T_2 von f an Entwicklungsstelle $x_0 = \pi$.

b) **[1]** Geben Sie das Restglied R_2 der quadratischen Taylorentwicklung an x_0 an

c) **[1]** Geben Sie eine Abschätzung für den maximalen Fehler $|f(x) - T_2(x)|$ im Intervall $[\frac{\pi}{2}; \pi]$ an.

Aufgabe 4:

Gegeben sei die reellen Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} 3ax - 4x^2 \ , & x \leq 0 \\ b + \cos(x^2) \ , & x > 0 \end{cases}$$

a) **[1]** Für welche Werte a, b ist $f(x)$ stetig?

b) **[1]** Für welche Werte a, b ist $f(x)$ differenzierbar?

c) **[3]** Die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \int_{t=0}^{x} \frac{1 + t^2 x}{1 + t^3} dt$$

Berechnen Sie $f'(x)$.

Aufgabe 5:

a) **[2]** Bestimmen Sie $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln(x^2+2x)}{\ln(x-3)}$

b) **[3]** Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int \frac{4x^2-2x+4}{x^3+x^2} dx$

c) **[2]** Bestimmen Sie den Wert des uneigentlichen Integrals

$$\int_e^{\infty} \frac{a}{x \cdot (\ln x)^2} dx \quad (a \in \mathbb{R})$$

Aufgabe 6:

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ reelle Parameter. Weiter seien die Matrizen $\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ sowie die Vektoren $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{x}$ wie folgt gegeben:

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & a \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2a+3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

a) **[2]** Welche der folgenden Ausdrücke sind definiert, welche sind nicht definiert?

$$\boldsymbol{DC}, \quad \mathbf{det}(\boldsymbol{D}), \quad \boldsymbol{r}^{\boldsymbol{T}} \cdot \boldsymbol{r}, \quad \mathbf{det}(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{T}}), \quad \boldsymbol{C}^{-\mathbf{1}}, \quad \boldsymbol{CC}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{r}$$

b) **[1]** Bestimmen Sie die Determinante von D in Abhängigkeit des Parameters $a \in \mathbb{R}$.

c) **[3]** Ermitteln Sie jeweils alle Paare (a, b), so dass das Gleichungssystem $\boldsymbol{Dx} = \boldsymbol{r}$
(i) eine eindeutige Lösung, (ii) unendlich viele Lösungen, (iii) keine Lösung besitzt.

Hinweise zur Mathe 1 Klausur von Prof. Fischer (Einordnung der Schwierigkeit)

Die vorliegende Probeklausur orientiert sich am Stil von Prof. Fischer, der aus den letzten Jahrgängen herausgelesen werden konnte. Bitte beachte, dass die Probeklausur dennoch kein 1:1 Abbild der echten Klausur darstellen muss.

Folgende Merkmale der Klausuren von Prof. Fischer sind uns bei der Erstellung aufgefallen:

1. Etwa 30-40% der Klausurpunkte liegen in Aufgaben, die mehr theoretische Kenntnisse oder Beweisfertigkeiten verlangen. Die dabei verlangten Fertigkeiten sind allerdings so breit gestreut, dass wir diese Aufgabentypen nicht in die Klausur mit hineinnehmen wollten. Wir haben uns in dieser Klausur zu 100% auf Standardfertigkeiten und Standardmuster konzentriert, die im Laufe der Vorbereitung auf jeden Fall gelernt werden sollten. Um für die echte Klausur bereit zu sein, solltest du diese Fertigkeiten zu mindestens 50% abrufen können (d.h. in dieser Klausur 50% der Punkte). Beachte bitte, dass du damit den von Prof. Fischer ankündigten Bestehensschnitt von 35% unter Einrechnung der zahlreichen Non-Standard-Aufgaben nur knapp erreichst.

2. Ein typisches Merkmal von Prof. Fischer gegenüber anderen Professoren ist, dass viele seiner Aufgaben letztlich eher einfach zu rechnen sind, sobald man verstanden hat, was er in der Aufgaben von den Studenten möchte. Es gibt einige sehr schnell gewinnbare Punkte. Um diese tatsächlich abzustauben, solltest du alle Rechen-Methoden aus den Übungen so gut verinnerlicht haben, dass du sie ohne weiteres Überlegen abrufen kannst.

Generell ist folgender Hinweis wichtig:

Mathe 1 hat (im Unterschied zu Mathe 2 und Mathe 3) eine immense Bandbreite an abgedeckten Themen. Man könnte drei fast vollkommen disjunkte Mathe 1 Klausuren stellen (d.h. drei Klausuren, die verschiedene Elementarskills verlangen und trotzdem Mathe 1 präzise prüfen).

Aus diesem Grund konnten zahlreiche bedeutende Skills in dieser Klausur nicht abgeprüft werden. Hier ein Versuch einer Aufzählung, welche Fertigkeiten zusätzlich zu den obigen noch notwendig sein könnten:

- **Komplexe Zahlen und Polynome:** Potenzen in $\mathbb{C}$, quadratische Gleichungen in $\mathbb{C}$, allgemeine komplexe Gleichungen, Skizzieren von Mengen in $\mathbb{C}$
- **Polynome:** Faktorisierung mit HORNER-Schema, gebrochenrationale Funktionen (Nullstellen, Polstellen, Lücken, Asymptoten), Newton-Interpolation
- **Reelle Funktionen:** Wertebereiche, Monotonie, Konvexität, Periodizität, Zerlegung in gerade/ungerade Funktion
- **Differentialrechnung:** Logarithmische Differentiation, Newton-Verfahren, Extremwertbestimmung, Fehlerrechnung, implizites Differenzieren
- **Integralrechnung:** Partielle Integration, Numerische Integration (Trapez-/SIMPSON), uneigentliche Integrale an Polstellen, Rotationskörper, Bogenlängen
- **Lineare Algebra:** Rang, Inverse, Kern einer Matrix, Eigenwerte, Schmidt'sches Orthogonalisierungsverfahren, LU-Zerlegung