Aufgabenblatt D2 : Vektorgeometrie

Die **Vektorrechnung** ist eins der Hauptthemen in der Abiturprüfung.

Die Fähigkeiten in diesem Gebiet werden im Abitur im Teil B mit etwa 15 bis 20 BE bewertet, was etwa 1 bis zwei Notenpunkten entspricht. Dabei ist vor allem Sicherheit in den Grundlagen wichtig, um mit den Textaufgaben des Teils B gut umgehen zu können.

In diesem und dem nächsten Übungsblatt werden die Grundlagen der Vektorrechnung und der analytischen Geometrie wiederholt.

Welche Fertigkeiten werden im Einzelnen auf diesem Blatt trainiert?

- Vektoren, Betrag, Winkel, Skalarprodukte, Kreuzprodukte
- Flächeninhalte von Dreiecken und Parallelogrammen im $\mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^2$
- Beschreibung von Geraden und Ebenen in Parameter- und Koordinatenform

Aufgabe 1: Vektoren und Vektoroperationen

a) Für welches $a \in \mathbb{R}$ nimmt $\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ a \end{pmatrix}$ den Wert 10 an?

b) Welche der folgenden Vektoren stehen aufeinander orthogonal?

$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) Bestimmen Sie das Kreuzprodukt $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$.

d) Für welche $a \in \mathbb{R}$ nimmt $\begin{pmatrix} a \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ die Länge 4 an?

e) Welcher Winkel liegt im Dreieck $A(0,1,0), B(2,3,0), C(1,1,-1)$ im Punkt A an?

Aufgabe 2: Parallelogramme, Flächeninhalte

a) Bestimmen Sie den Punkt D im Parallelogramm $ABCD$ mit den folgenden Koordinaten:

$$A(1,4,0), B(2,5,0), C(1,1,5)$$

b) Bestimmen Sie den Punkt C im Parallelogramm $ABCD$ mit den folgenden Koordinaten:

$$A(1,1,2), B(0,2,1), D(1,6,1)$$

c) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den beiden Vektoren $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix}$ aufgespannt wird!

d) Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Parallelogramme aus a) und b).

e) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks $A(0,1,0), B(2,3,0), C(1,1,-1)$.

Aufgabe 3: Geraden und Ebenen

a) Geben Sie eine Gerade g an, die durch die Punkte $A(1,4,2), B(0,-3,6)$ verläuft!

b) Geben Sie eine Ebene an, die durch die $A(1,4,2), B(0,-3,6), C(2,1,-1)$ verläuft. Geben Sie sowohl die Parameterform als auch die parameterfreie Darstellung an!

c) Überführen Sie die folgenden Ebenen in eine parameterfreie Form. Geben Sie außerdem deren Hesse'sche Normalform an:

$E_1: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $E_2: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

d) Überführen Sie die folgenden Ebenen in die Parameterform:

$E_1: \; x + 3y - z = 0$ $E_2: \; 2x - y + 4z = 5$

$E_3: \; y - 3z = 1$ $E_4: \; 3x = 6$

Lösungen: (Angaben ohne Gewähr, bei Unklarheit bitte nachfragen)

1.

a) $a = \frac{7}{4}$ **b)** $v_1 \perp v_2, v_1 \perp v_4, v_2 \perp v_3, v_3 \perp v_4$ **c)** $(-75, 7, -4)^T$

d) $a = \pm\sqrt{3}$ **e)** $\propto = 60°$

2. a) $D(0,0,5)$ **b)** $C(0,7,0)$ **c)** $A = \sqrt{5690} = 75{,}43$ **d)** $A = \sqrt{59}$ bzw. $A = \sqrt{42}$ **e)** $A = \sqrt{3}$

3. a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$, $E: 33x + y + 10z = 57$

c) $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $4x - y + 3z = 11$, $HNF\colon \frac{4}{\sqrt{26}}x - \frac{1}{\sqrt{26}}y + \frac{3}{\sqrt{26}}z = \frac{11}{\sqrt{26}}$

$\vec{n} = \begin{pmatrix} -9 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix}$, $-9x - 8y + 5z = 14$, $HNF\colon \frac{-9}{\sqrt{160}}x - \frac{4}{\sqrt{10}}y + \frac{5}{\sqrt{160}}z = \frac{7}{\sqrt{40}}$

d) $z = x + 3y,\quad x = s,\quad y = t,\qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$y = 5 - 2x - 4z,\quad x = s,\quad z = t,\qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$

$y = 1 + 3z,\quad x = s,\quad z = t,\qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$x = 2,\quad y = s,\quad z = t,\qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (parallel zur xy-Ebene)