Probeklausur

MW Mathe 2, TU Dresden,
nach Stil von Prof. Fischer

LernKompass
verstehen. behalten. gelingen.

Auf unserem Youtube-Kanal findest du zahlreiche Videos rund um die Mathe 1-3 im Ingenieursstudium

Mit dieser Probeklausur fassen wir die typischen Themen der Mathe 2 bei Prof. Fischer (TU Dresden) zusammen. Die Aufgaben sind dabei von uns entwickelt, orientieren sich aber in Stil und Inhalt an den Originalen von Prof. Fischer.

Zu den Themen gehören:

- Lineare Gleichungssysteme
- Rechnen mit Matrizen und Determinanten
- Differentialrechnung im Mehrdimensionalen
- Differentialgleichungen 1. Ordnung
- Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten
- Differentialgleichungssysteme

Die Themen können bei anderen Professoren, z.B. Prof. Matthies oder Prof. Schwartz, auch abweichen. Jeder Prüfer legt andere Schwerpunkte in seiner Veranstaltung und seiner Prüfung. Um mehr Aufgabentypen vorstellen zu können, haben wir uns entschieden, eine leichte Überlänge zu akzeptieren – die Klausur ist ca. 15% länger als die üblichen Klausuren.

Punktverteilung in dieser Probeklausur:

Aufgabe Nr.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**Summe**
Punkte Soll	5	8	5	4	4	10	8	44
Punkte Ist								

Unsere Klausuranalyse findest du auf unserem Youtube-Kanal, am einfachsten erreichbar über den rechts stehenden QR-Code.

Viel Erfolg bei deiner Vorbereitung auf die Mathe-Prüfung
Matthias und das Team von LernKompass

info@lern-kompass.de

www.lern-kompass.de

Strehlener Str. 14
01069 Dresden

0351-45199340

Aufgabe 1:

Mit den reellen Parametern $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sind gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 10 & 1 \\ 1 & 6 & 2\alpha + 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ \beta + 7 \end{pmatrix}$$

a) **[3]** Bestimmen Sie alle Paare $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, für die das Lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = b$ jeweils

(i) genau eine Lösung
(ii) keine Lösung
(iii) unendlich viele Lösungen besitzt

b) **[1]** Bestimmen Sie für $\alpha = \beta = -2$ die Lösungsmenge von $A\vec{x} = b$.

Aufgabe 2:

Gegeben seien die reellen Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & \alpha \\ 2 & \alpha & \beta \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) **[1]** Begründen Sie, warum die Matrix A in jedem Fall drei (nicht notwendigerweise verschiedene) reelle Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ besitzt.

b) **[1]** Sei $\beta = 5$. Ermitteln Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die der Vektor $v = (1,1,0)^T$ Eigenvektor der Matrix A ist.

c) **[2]** Sei nun $\alpha = -2$. Ermitteln Sie alle $\beta \in \mathbb{R}$, sodass für $\lambda^* = 7$ die Bedingung

$\lambda^* \in \{\lambda_k \mid k = 1,2,3\}$ gilt, d.h. λ^* Eigenwert der Matrix A ist.

d) **[2]** Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix B.

Hinweis: Beachten Sie, dass für Matrizen dieser Art gewisse Orthogonalitätseigenschaften für die Eigenvektoren v_1, v_2 gelten.

e) **[2]** Wir betrachten die Gleichung 2.Ordnung

$$2x^2 + 4xy - y^2 + 2x - 3y = 4$$

Geben Sie eine orthogonale Transformationsmatrix S mit $S^T = S^{-1}$ zur Überführung der Gleichung in ihre Normalgestalt an und beschreiben Sie die Form der Lösungsmenge der genannten Gleichung.

Aufgabe 3:

Betrachtet werde die zweistellige reelle Funktion

$$f(x,y) = x^2 - \frac{2y}{x} + 4\ln(x-y)$$

a) **[1]** Skizzieren Sie den Definitionsbereich von f im $\mathbb{R}^2$.

b) **[1]** Geben Sie eine Gleichung der Tangentialebenen an den Graphen

$$G = \{(x,y,z) \mid z = f(x,y)\}$$

im Punkt $(2,1,f(2,1))$ an.

c) **[2]** Berechnen Sie die Taylorentwicklung 2. Ordnung von f mit Entwicklungspunkt $(x_0,y_0) = (1,-1)$

d) **[1]** Geben Sie die notwendigen Optimalitätsbedingungen zur Bestimmung der Extremwerte von $f(x,y)$ an.

Aufgabe 4:

Mithilfe der Methode von Lagrange soll das maximale Volumen eines (geraden) Kreiskegels mit Radius r und Höhe h bestimmt werden. Aufgrund von Beschränkungen beim Material soll dabei die Gleichung $2r + h = 10cm$ eingehalten werden.

a) **[1]** Stellen Sie die Lagrange-Funktion $L(r,h,\lambda)$ für diese Optimierungsaufgabe auf.

b) **[1]** Geben Sie die notwendigen Optimalitätsbedingungen zur Bestimmung des maximalen Volumens an.

c) **[2]** Berechnen Sie die Menge aller stationären Punkte der Optimierungsaufgabe.

Aufgabe 5:

Das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3x^2 + 2yx^3 &= 5 \\ \ln x - 4x\ln y + 2 &= 0 \end{aligned}$$

soll ausgehend von der Startlösung $(x_0,y_0) = (1,1)$ mit Newtonverfahren gelöst werden.

a) **[1]** Ermitteln Sie die Jacobimatrix $J(x,y) = J_F(x,y)$ derjenigen Funktion F, sodass das genannte Gleichungssystem in der Form $F(x,y) = (0,0)$ dargestellt werden kann

b) **[1]** Ermitteln Sie $[J_F(x_0,y_0)]^{-1}$

c) **[2]** Ermitteln Sie ausgehend von a) und b) nun die iterierte Näherung (x_1,y_1).

Aufgabe 6:

a) **[4]** Lösen Sie das Anfangswertproblem $xy'(x) + (y(x) + 1)\ln(x) = 0\,,\ y(1) = -2$

b) **[4]** Lösen Sie das homogene Differentialgleichungssystem

$$\dot{x} = -5x + 3y,\ \ \dot{y} = -15x + 7y$$

c) **[2]** Das Anfangswertproblem

$$y' = 2x^2 - yx, \qquad y(1) = 3$$

soll mit dem impliziten Eulerverfahren mit Schrittweite $h = 0.5$ gelöst werden. Führen Sie einen Schritt des impliziten Eulerverfahrens durch!

Aufgabe 7:

Gegeben sei die von Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$ abhängige lineare Differentialgleichung

$$y''' + 2y'' + \alpha y' + 2y = r(x)$$

a) **[1]** Ermitteln Sie alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die $y_1 = e^{-2x}$ Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung ist.

Sei ab jetzt $\alpha = 3$.

b) **[2]** Berechnen Sie die homogene Lösung y_h der Differentialgleichung.

c) **[2]** Geben Sie einen Ansatz für die partikuläre Lösung der Differentialgleichung für die Inhomogenität $r(x) = 2e^{-x} + 3e^{-0,5x}$ an.

Sei nun $\alpha = 1$.

d) **[3]** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für $r(x) = 2x^2 - 1$