Probeklausur

MW Mathe 3, TU Dresden,
nach Stil von Prof. Matthies

Auf unserem Youtube-Kanal findest du zahlreiche Videos rund um die Mathe 1-3 im Ingenieursstudium

Mit dieser Probeklausur fassen wir die typischen Themen der Mathe 3 bei Prof. Matthies (TU Dresden) zusammen. Die Aufgaben sind dabei von uns entwickelt, orientieren sich aber in Stil und Inhalt an den Originalen von Prof. Matthies.

Zu den Themen gehören:

- Reihen und Potenzreihen
- Periodische Funktionen, Fourierreihen, Fourierentwicklung
- Differentialgeometrie: Kurven und ihre Kenngrößen
- Vektoranalysis
- Integralrechnung im Mehrdimensionalen
- Partielle Differentialgleichungen
- Stochastik

Die Themen können bei anderen Professoren, z.B. Prof. Fischer oder Prof. Sander, auch abweichen. Jeder Prüfer legt andere Schwerpunkte in seiner Veranstaltung und seiner Prüfung. Um mehr Aufgabentypen vorstellen zu können, haben wir uns entschieden, eine leichte Überlänge zu akzeptieren – die Klausur ist ca. 15% länger als die üblichen Klausuren.

Punktverteilung in dieser Probeklausur:

Aufgabe Nr.	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**Summe**
Punkte Soll	7	10	7	7	6	8	7	5	57
Punkte Ist									

Unsere Klausuranalyse findest du auf unserem Youtube-Kanal, am einfachsten erreichbar über den rechts stehenden QR-Code.

Viel Erfolg bei deiner Vorbereitung auf die Mathe-Prüfung
Matthias und das Team von LernKompass

info@lern-kompass.de

www.lern-kompass.de

Strehlener Str. 14
01069 Dresden

0351-45199340

Aufgabe 1:

Gegeben seien die Kurven

$$C_1:\ \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ t \end{pmatrix}, t > 0 \qquad C_2:\ y(x) = \cosh(x), -a \leq x \leq a$$

sowie das Vektorfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} xy^2 \\ x + 2z^2 \\ z - 2x \end{pmatrix}$$

und die Funktion $f(x, y, z) = x^2 + 3yz^3 - \cos(xy)$.

a) **[2]** Ermitteln Sie die Krümmung $\kappa(t)$ der Kurve C_1.
b) **[2]** Ermitteln Sie die Bogenlänge der Kurve C_2.
c) **[3]** Geben Sie an, welche der folgenden Ausdrücke definiert sind und berechnen Sie diese gegebenenfalls:

$$rot\ \vec{F}\,, \qquad grad\ \vec{F}\ ,\ \ div\,(grad\ f)\ , \qquad rot\,(grad\ f)\ , \qquad div\,(div\ f)$$

Aufgabe 2:

Der Körper K wird im ersten Oktanten des $\mathbb{R}^3$ begrenzt von den Flächen

$$x^2 + y^2 = 1\ , \qquad x^2 + y^2 = 4\,, x = 0\ , y = 0\ , z = 0\ ,\ \ z = 3$$

a) **[1]** Skizzieren Sie den Grundriss des Körpers K.

b) **[3]** Berechnen Sie die Masse von K bezüglich der Dichte $\delta(x, y, z) = x + y$.

c) **[3]** Berechnen Sie den Fluss $\iint_{\partial K} \vec{v}\, d(\partial K)$ bezüglich des Vektorfelds $\vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x^2 + xy \\ yz \\ -\frac{1}{2}z^2 + 3x \end{pmatrix}$ mit nach außen gerichtetem Normalenvektor $\vec{n}$.

d) **[3]** Berechnen Sie den Fluss $\iint_A \vec{v}\, dA$, wobei A die durch $z = 3$ beschriebene Deckfläche von K darstellt.

Aufgabe 3:

Eine Funktion $f(x) = 1\ (0 < x < 1),\ f(x) = 2 - x\ (1 < x < 2)$ mit $f(-x) = -f(x)$ und $f(x+4) = f(x)$ soll in eine Fourierreihe entwickelt werden.

a) **[1]** Skizzieren Sie die Funktion $f(x)$ im Intervall $[-3; 5]$

b) **[3]** Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten a_k, b_k von $f(x)$

c) **[3]** Die allgemeine Lösung einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung kann dargestellt werden als

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \cos(kx) \cdot (a_k \cos(k\pi t) + b_k \sin(k\pi t))$$

Ermitteln Sie die spezielle Lösung für die Anfangsbedingungen:

$$u(x,0) = 2\cos(x) - 3\cos(4x) \quad , \quad u_t(x,1) = \cos(2x)$$

Aufgabe 4:

Gegeben sei die Kurve C und das Vektorfeld $\vec{w}$

$$C\colon\ \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ \cos(\pi t) \end{pmatrix}, 0 \le t \le 1 \qquad \vec{w}(x,y) = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$$

a) **[3]** Berechnen Sie das Arbeitsintegral $\int_C\ 2x\,dx + (y-x)dy$.

b) **[1]** Zeigen Sie, dass das Arbeitsintegral $\int_{(0,2)}^{(1,3)} P\,dx + Q dy$ wegunabhängig ist.

c) **[3]** Geben Sie eine Parametrisierung der Strecke von (0,2) nach (1,3) an, und berechnen Sie im Anschluss den Wert des Arbeitsintegrals $\int_{(0,2)}^{(1,3)} P\,dx + Q dy$

Aufgabe 5:

[6] Gegeben sei die partielle Differentialgleichung

$$u_t = \frac{1}{4} u_{xx} \quad (\ t > 0, x \in [0,r]\ )$$

und die Bedingungen

$$u(0,t) = u(r,t) = 0$$

Ermitteln Sie mittels Produktansatz $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ die allgemeine Lösung der Anfangsrandwertaufgabe. Für die Lösungen X kommen dabei nur periodische Funktionen in Betracht.

Aufgabe 6:

a) **[3]** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$-xu_x + yu_y = xu$$

b) **[2]** Bestimmen Sie die spezielle Lösung dieser partiellen Differentialgleichung unter der Anfangsbedingung $u(x,1) = e^{-x}$

c) **[1]** Untersuchen Sie, welchen Typ (elliptisch, hyperbolisch, parabolisch) die folgende partielle Differentialgleichung besitzt:

$$\cos(x)\, u_{xx} - 2\sin(x)\, u_{xy} - \cos(x)\, u_{yy} + 3u_x = u$$

d) **[2]** Überführen Sie die Differentialgleichung $xu_x - (y-1)u_y = x^2(1-y)^3$ mittels der Transformation $s(x,y) = x(y-1)$, $t(x,y) = y$ in eine PDGL in $w = w(s,t)$.

Aufgabe 7:

Gegeben sei die Funktion

$$f_c(x) = \begin{cases} c - 2x^2 & \text{für} \quad 0 \leq x \leq \sqrt{c} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

a) **[3]** Für welche $c > 0$ ist $f_c(x)$ Dichtefunktion einer Zufallsvariablen X ? Berechnen Sie die zugehörige Verteilungsfunktion $F_c(x)$.

b) **[2]** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P[X \leq 2\,]$ und $P[X < 2 \mid X > 1]$.

c) **[2]** Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen X.

Aufgabe 8:

Ein namentlich nicht näher genannter Mathematikprofessor führt am Ende seiner Vorlesung eine Klausur mit 100 erreichbaren Punkten durch. Die erreichten Punktzahlen der Studenten konnten dabei als normalverteilt mit $\mu_M = 40$ und $\sigma_M^2 = 64$ angesehen werden.

a) **[1]** Die anfangs von Seiten des Professors definierte Bestehensgrenze liegt bei 42 Punkten. Berechnen Sie, wie groß der Anteil der Studenten wäre, die unter dieser Regelung die Klausur bestehen würden.

b) **[2]** Um die Reputation der Hochschule zu schonen und sich vor unangenehmen Disziplinarmaßnahmen zu schützen, entscheidet der Prüfer, die Bestehensgrenze so zu senken, dass mindestens 60% der Klausurteilnehmer die Klausur bestehen. Ermitteln Sie, ab wievielen Punkten die Studenten jetzt bestanden haben.

c) **[2]** Das Mathematikmodul wird zusammen mit einem Methodenmodul mit ebenfalls 100 erreichbaren Punkten in einer Modulnote zusammengeführt. Die Punktleistung der Studenten kann hier als normalverteilt mit $\mu_A = 75$ und $\sigma_A = \sqrt{17}$ angesehen werden. Ermitteln Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein zufällig herausgegriffener Student insgesamt mehr als 124 Punkte erreicht.

Hinweise zur Mathe 3 Klausur von Prof. Matthies
(Einordnung der Schwierigkeit)

Die vorliegende Probeklausur orientiert sich am Stil von Prof. Matthie, der aus den letzten Jahrgängen herausgelesen werden konnte. Bitte beachte, dass die Probeklausur dennoch kein 1:1 Abbild der echten Klausur darstellen muss.

Folgende Merkmale der Klausuren von Prof. Matthies sind uns bei der Erstellung aufgefallen:

1. Die meisten der Klausuraufgaben stellen typische Standard- bzw. Lehrbuchaufgaben dar. Man kann sie sehr gut vorbereiten, ohne dass man größere negative Überraschungen in der Klausur erlebt.

2. Es gibt einige „Umkehraufgaben“ in diesen Klausuren, die so in der Vergangenheit von anderen Prüfern selten abgefragt wurden.

3. Vergleichsweise einfache Themen bei Prof. Matthies sind Differentialgeometrie, Integrale im Mehrdimensionalen und Reihen. Einige besondere Herausforderungen hat Prof. Matthies bei den Partiellen Differentialgleichungen eingearbeitet. Die Aufgaben zum Separationsansatz sind z.B. meist schwieriger als die anderer Prüfer.

Genereller wichtiger Hinweis:

Mathe 3 setzt ein souveränes Grundwissen in der Integralrechnung, der Differentialrechnung und den Differentialgleichungen voraus. Wir empfehlen daher, Mathe 3 nicht zeitgleich mit Mathe 2 oder Mathe 1 vorzubereiten. Es handelt sich gerade aufgrund der zahlreichen benötigten Grundlagen um das herausforderndste Fach des gesamten Grundstudiums.

Aus diesem Grund solltest du bei der Vorbereitung mit mindestens 120 Stunden Vorbereitungszeit kalkulieren, sofern du in Mathe 1 und 2 alle wichtigen Grundlagen gut verstanden hast.